Osnove matematične analize
Vaje, 2. teden

1. * Z matematično indukcijo dokaži:

   (a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

   (b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$,

   (c) $n! > 2^{n-1}$ za $n > 2$,

   (d) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n > \frac{(3n-1)4^{n+1}}{9}$.

2. * Z uporabo matematične indukcije utemelji, da za vsako naravno število $n \geq 2$ velja:

$$\log\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{n+1}{2n}\right).$$

3. Dokaži, da je za vsako naravno število $n > 0$ število $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deljivo s 133.

4. * Dokaži, da je za vsako naravno število n število $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ deljivo s 57.

5. Ugani formulo za število diagonal konveksnega mnogokotnika in jo dokaži z matematično indukcijo.

6. * Za vsako od naslednjih množic določi infimum in supremum. Ali obstaja minimum ali maksimum?

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ ||x-1|-2| \geq 1\}$,

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ ||x-1|-2| \geq 1, x \leq 5 \text{ in } x > 1\}$,

   (c) $C = \{2 + \sin x\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$,

   (d) $D = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ \log 2 + \log(x^2-1) \leq 2\log|x-1|\}$,

   (e) $E = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ \log 2 + \log|x^2-1| \leq 2\log|x-1|\}$,

   (f) $F = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ \log 2 + \log(x^2-1) \leq 2\log(x-1)\}$.

   Rešitev:

   (a) $\inf A = -\infty$, $\sup A = \infty$, $\min A$ in $\max A$ ne obstajata,

   (b) $\inf B = 1$, $\sup B = 5$, $\min B$ ne obstaja, $\max B = 5$,

   (c) $\inf C = \min C = 1$, $\sup C = \max C = 3$,

   (d) $\inf D = \min D = -3$, $\sup D = -1$, $\max D$ ne obstaja,

   (e) $\inf E = \min E = -3$, $\sup E = \max E = -\frac{1}{3}$,

   (f) $\inf F = \inf \emptyset = \infty$, $\sup F = \sup \emptyset = -\infty$, $\min F$ in $\max F$ ne obstajata.

7. Poišči množico rešitev neenačbe

$$|x+2| - |x-3| > 3.$$

   Določi še njen infimum in supremum. Ali ima minimum? Maksimum?

   Rešitev:

   Množica rešitev je $(2, \infty)$, infimum je 2, supremum je ∞, minumum in maksimum ne obstajata.