KOMPOZITUM PRESLIKAV

Naj bosta f in g funkciji oziroma ustrezni preslikavi: $f \circ g$ je funkcija (preslikava), ki ji pravimo *kompozitum* funkcij (preslikav) f in g. Kako? Po vrsti.

V družini relacij lahko definiramo operacijo $\circ$ z naslednjim predpisom

$$f \circ g = g * f.$$

Pri tem je $g * f$ relacijski produkt g in f.

Torej velja

$$\begin{aligned} x(f \circ g)y &\iff x(g * f)y \qquad (1)\\ &\iff \exists z : (xgz \text{ in } zfy) \end{aligned}$$

V primeru, ko sta g in f funkciji ali celo preslikavi računamo naprej:

$$\begin{aligned} &\iff \exists z : (z = g(x) \text{ in } y = f(z)) \\ &\iff y = f(g(x)) \end{aligned}$$

Trditev 1 *Naj bo $f : A \to B$ in f^{-1}* inverzna relacija *k f. Z R_f označimo relacijo, za katero je xR_fy natanko tedaj, ko je $f(x) = f(y)$.*

(a) $f^{-1} \circ f = R_f$

(b) $f \circ f^{-1} = id_{\mathcal{Z}_f}$

(c) f je injektivna $\iff$ $f^{-1} \circ f = id_A$

(d) f je surjektivna $\iff$ $f \circ f^{-1} = id_B$

Dokazujemo po vrsti. Velja:

$$\begin{aligned} x(f^{-1} \circ f)y &\iff \exists z : (xfz \text{ in } zf^{-1}y) \\ &\iff \exists z : (xfz \text{ in } yfz) \\ &\iff f(x) = f(y) \iff xR_fy \end{aligned}$$

Dokaz točke (b):

$$\begin{aligned} x(f \circ f^{-1})y &\iff \exists z : (xf^{-1}z \text{ in } zfy) \\ &\iff \exists z : (zfx \text{ in } zfy) \\ &\iff x = y \text{ in } x \in \mathcal{Z}_f \text{ in } y \in \mathcal{Z}_f \\ &\iff x\,\mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f} y \end{aligned}$$

V dokaza točk (c) in (d) vpletemo lastnosti (a) oziroma (b):

$$\begin{aligned} f \text{ je injektivna} &\iff \forall x, y \in A : (f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y) \\ &\iff \forall x, y \in A : (xR_fy \Leftrightarrow x\,\mathrm{id}_A y) \\ &\iff R_f = \mathrm{id}_A \iff f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ je surjektivna} &\iff \mathcal{Z}_f = B \\ &\iff \mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f} = \mathrm{id}_B \iff f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \end{aligned}$$

Premisliti je potrebno, da je operacija $\circ$ ustrezna. To pomeni, da je $f \circ g$ funkcija, če sta f in g obe funkciji, če pa sta f in g ustrezni preslikavi, mora biti tudi $f \circ g$ preslikava. Res:

Trditev 2 *(a) Če sta f in g enolični (=funkciji), potem je tudi $f \circ g$ enolična in velja $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

(b) Če $f : B \to C$ in $g : A \to B$, potem $f \circ g : A \to C$.

Dokažimo najprej (a). Upoštevamo, da sta f in g enolični.

$$\begin{aligned}
x(f \circ g)y \text{ in } x(f \circ g)z \quad &\Longrightarrow \quad \exists u : (xgu \wedge ufy) \text{ in } \exists v : (xgv \wedge vfz) \\
&\Longrightarrow \quad \exists u, v : (xgu \wedge ufy \wedge xgv \wedge vfz) \\
&\Longrightarrow \quad \exists u, v : (u = v \wedge ufy \wedge vfz) \\
&\Longrightarrow \quad \exists u : (ufy \wedge ufz) \quad \Longrightarrow \quad y = z
\end{aligned}$$

Za drugi del trditve (a) se skličemo na račun (1), pri čemer upoštevamo, da je $y = (f \circ g)(x)$ samo funkcijski zapis dejstva $x(f \circ g)y$.

Za dokaz (b) najprej upoštevamo, da je $f \circ g \subseteq A \times C$, saj je $f \subseteq B \times C$ in $g \subseteq A \times B$. Poleg tega je $\mathcal{Z}_G \subseteq B = \mathcal{D}_f$ in zato $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g = A$. Torej je definicijsko območje funkcije $f \circ g$ enako A, kar pomeni, da je $f \circ g$ preslikava iz A v G.