Osnove matematične analize
Vaje, 11. teden

1. * Dana je funkcija dveh spremenljivk $f(x,y) = x^2y$.
   (a) Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ v točki $(1,1)$.
   (b) Izračunaj smerni odvod funkcije f v poljubni smeri v točki $(1,1)$. V kateri smeri je največji?
   (c) Skiciraj nivojsko krivuljo skozi točko $(1,1)$ in gradient v tej točki. V kakšni smeri kaže gradient glede na nivojsko krivuljo?

Rešitve:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$,

(b) $f_{(x,y)}(1,1) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, največji je v smeri $(x,y) = (2,1)$,

(b) $\mathrm{grad} f(1,1) = (2,1)$, nivojnica ima enačbo $y = \frac{1}{x^2}$. Smerni koeficient tangente na nivojnico je -2, torej je smerni vektor tangente $(1,-2)$. Ker je $(2,1)\cdot(1,-2) = 0$, je gradient pravokoten na nivojnico.

2. * Nariši nivojnice funkcije $f(x,y) = y(x^2-1)$ in nato še pot od točke $(-2,1,3)$ do točke $(2,-1,-3)$, ki se nikjer ne vzpenja.

Rešitev: Nivojnice so krivulje $y = \frac{a}{x^2-1}$ za $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ in pa premice $y=0$, $x=1$, $x=-1$ pri $a=0$.

3. * Med točkami (x,y) v ravnini, ki zadoščajo zvezi $y = \frac{1}{x}$, poišči tiste, za katere je $f(x,y) = x^2+y^2$ najmanjša. Rezultat geometrijsko interpretiraj.

Rešitev: $(1,1)$ in $(-1,-1)$.

4. Dana je funkcija $f(x,y) = \left(x^2+\frac{3}{4}\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$. Poišči lokalne ekstreme in pri vsakem ugotovi, za katero vrsto ekstrema gre.

Rešitev: $(\frac{1}{2},0)$ in $(-\frac{1}{2},0)$ sta lokalna maksimuma.

5. Določi vse stacionarne točke funkcije
   (a) * $f(x,y) = 2x^3+6xy^2-3y^3-150x$,
   (b) * $f(x,y) = x^4+y^4-36xy$,
   (c) $f(x,y) = x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4$.

Rešitve:

(a) $(5,0)$ je lokalni minimum, $(-5,0)$ lokalni maksimum, $(3,4)$ in $(-3,-4)$ sta sedli,

(b) $(0,0)$ je sedlo, $(3,3)$ in $(-3,-3)$ sta lokalna minimuma,

(c) $(0,0)$ je lokalni maksimum, $(2,0)$ je lokalni minimum.

6. Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x,y) = xy$ na krogu
$$x^2+y^2 \leq 1.$$

Rešitev: V notranjosti kroga ni ekstremov (točka $(0,0)$ je sedlo). Na krožnici sta minimuma v $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, maksimuma sta v $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

7. * Na voljo imamo l metrov dolgo tanko palico. Iz nje izrežemo 12 krajših palic, iz katerih je mogoče sestaviti ogrodje kvadra. Izračunaj, kako dolge stranice kvadra moramo izrezati, da bomo dobili kvader z največjo možno površino.

Rešitev: Površina bo največja, ko bo kvader kocka.

8. Na kakšne kose moramo razrezati l metrov dolgo palico, da bo ploščina osnovne ploskve dobljenega kvadra enaka A, kvader z izrezanim skeletom pa bo imel največji možni volumen?

Rešitev: Volumen bo največji, ko bo kvader kocka.