

Diskretne strukture UNI

Vaje 8

1. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definiramo relacijo

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1), (4, 1)\}.$$

- (a) Nariši grafe relacij R , $R^2 = R * R$ in $R^3 = R * R * R$.
- (b) Katere izmed zgornjih relacij so reflektivne, simetrične in/ali tranzitivne?

2. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definiramo relacijo

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 1)\}.$$

- (a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1, 3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10} .
- (b) Pokaži, da je $S^{2021} = U_A$ (kjer je U_A univerzalna relacija na množici A , tj. $U_A = A \times A$).
- (c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a, b)\}$, kjer je (a, b) poljuben urejen par, ki ni v R . Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2021} = U_A$.

3. Na množici besed \mathcal{B} definiramo relacijo R z naslednjim opisom:

beseda α je v relaciji z besedo β , $\alpha R \beta$, če lahko besedo β sestavimo iz črk besede α z uporabo največ enega dodatnega znaka (črke).

Tako je hrast R trak, vendar $\neg(\text{hrast } R \text{ krak})$ in $\neg(\text{hrast } R \text{ strop})$.

- (a) Denimo, da velja $\alpha R \beta$. V kakšni zvezi sta dolžini besed α in β ?
- (b) Nariši graf relacije R v primeru, ko je

$$\mathcal{B} = \{\text{klop, lok, oko, pot, prostor, roka, rosa, šola, šotor, top, zora}\}.$$

- (c) Določi (opiši z besedami) relacijo $R \cap R^{-1}$ za splošen \mathcal{B} . Lahko si pomagaš z grafom iz prejšnje točke.

4. Na množici $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ definiramo relacijo R :

$$xRy \Leftrightarrow y - x \text{ je praštevilo.}$$

- (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R .
- (b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$

5. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R :

$$aRb \Leftrightarrow \gcd(a, b) > 3.$$

- (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
- (b) Ali je relacija R reflektivna, simetrična ali tranzitivna?
- (c) Ali je relacija R^2 reflektivna, simetrična ali tranzitivna?

6. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R :

$$xRy \Leftrightarrow 5 \text{ deli } x + 4y.$$

Pokaži, da je R reflektivna, simetrična in tranzitivna relacija.

7. Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relacijo R :

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d.$$

Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede.

8. Naj bo \mathbb{P} množica praštevil. Relacija R na \mathbb{N} je podana s predpisom

$$aRb \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b).$$

- (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
- (b) Poišči [2] in [2021].
- (c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

9. Na $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ je podana relacija R s predpisom

$$aRb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$

- (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
- (b) Poišči [4].
- (c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

10. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo \leq tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B .

- (a) Utemelji, da je relacija \leq refleksivna in tranzitivna.
- (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
- (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
- (d) Je relacija \leq simetrična?

11. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = b_n \dots b_2 b_1$, kjer so številke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo \leq

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall i (a_i \leq b_i).$$

- (a) Ali velja: $2 \leq 3$, $5 \leq 8$, $4 \leq 5$?
- (b) Prepričaj se, da je \leq relacija delne urejenosti.
- (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.
- (d) Ali je \leq relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to sledi iz Hassejevega diagrama?
- (e) Preveri, da velja implikacija: Če $a \leq b$, potem $a \leq b$.

12. V množici celih števil \mathbb{Z} je dana relacija

$$xRy \Leftrightarrow 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

- (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
- (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
- (c) Določi moč factorske množice \mathbb{Z}/R .