

# Osnove matematične analize

## Vaje, 9.teden

1. \* Naj bo z enačbo  $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 1$  implicitno podana funkcija  $y(x)$ .

(a) Zapiši enačbi tangent na graf krivulje v obeh točkah, kjer je  $x = 0$ .

(b) Za katere vrednosti  $x$  je naklon tangente enak  $k = \frac{1}{2}$ ?

Rešitvi: (a)  $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{\sqrt{5}}$  in  $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}$ , (b)  $x = \pm \frac{1}{3}$ .

2. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

(a) \*  $\sqrt[3]{28}$ ,

(d)  $\log 0.9$ ,

(b)  $\sqrt[4]{260}$ ,

(c)  $\sin(\frac{2\pi}{9})$ ,

(e)  $\log \sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$ .

Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).

3. Poišči točko  $T$  na premici  $y = x$  za katero je vsota kvadratov razdalj do točk  $(-1, 4)$  in  $(3, 6)$  najmanjša možna.

Rešitev:  $T(3, 3)$ .

4. \* Med vsemi enakokrakimi trikotniki z danim obsegom  $o$  poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

Rešitev: Ploščina bo največja, ko bo trikotnik enakostraničen.

5. S pomočjo logaritmiranja poišči odvode naslednjih funkcij:

(a)  $f(x) = x^x$ ,

(b)  $f(x) = x^{1/x}$ .

Rešitvi: (a)  $x^x(\log x + 1)$ , (b)  $x^{(-2+1/x)}(1 - \log x)$ .

6. \* Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$g(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 5.$$

Rešitev: Lokalni maksimum je 181 pri  $x = -2$ , lokalni minimum je -8 pri  $x = 1$ .

7. \* Z L'Hospitalovim pravilom izračunaj naslednje limite:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x)}{x - \sin(3x)}$ ,

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \cdot \tan(x)$ ,

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^2+x})^{x^2}$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + e^x}{2x^3}$ ,

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ ,

(g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$ .

Rešitve: (a)  $-\frac{3}{2}$ , (b) 1, (c)  $\infty$ , (d)  $\frac{1}{2}$ , (e) 0, (f) e, (g) 1.

8. \* Določi intervale konveksnosti in konkavnosti za spodnji funkciji in skiciraj grafa.

$$(a) f(x) = xe^{-x},$$

$$(b) g(x) = x \log(x).$$

9. Natančno nariši graf spodnjih funkcij (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje).

$$(a) f(x) = \frac{-2x}{x^2+4}$$

$$(b) * f(x) = x \log(x)$$

Rešitve:

(a)  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ , ničla pri  $x = 0$ , lokalni maksimum pri  $x = -2$ ,  $f(-2) = \frac{1}{2}$ , lokalni minimum pri  $x = 2$ ,  $f(2) = -\frac{1}{2}$ , konveksna na  $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$ , konkavna na  $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$ ,  $f(\pm 2\sqrt{3}) = \mp \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \mp 0.4$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$ .

(b)  $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$ , ničla pri  $x = 1$ , lokalni minimum pri  $x = \frac{1}{e}$ ,  $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0.37$ , je konveksna,  $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$ .