

Ime in priimek

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

Diskretne strukture VSP: 3. računski izpit

30. avgust 2021

Čas pisanja: 60 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na ucilnica.fri.uni-lj.si. **Vse odgovore dobro utemelji!**

| | |
|----------|--|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| Σ | |

1. naloga (35 točk)

Dane so izjavne formule:

$$A \equiv \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \forall y (R(x) \wedge R(y)), \quad B \equiv \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall z R(z),$$

$$C \equiv \exists x \exists y \forall z (P(y, x) \Rightarrow R(z)), \quad D \equiv \forall x \forall y (P(x, y) \Rightarrow R(x) \wedge R(y)).$$

a) (15 točk) Z uporabo zakonov izjavnega in predikatnega računa utemelji, da so formule A, B in C enakovredne.

7 { $A \sim \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x R(x) \wedge \forall y R(y) \sim \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \underbrace{\forall z R(z) \wedge \forall z R(z)}_{\forall z R(z)}$

↑ preimenujem ↑ preimenujem

8 { $\sim \forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall z R(z) = B$

↑ preimenujem x v y in zamenjam vrstni red $\exists x \exists y$

8 { $B \sim \neg \forall x \forall y P(x, y) \vee \forall z R(z) \sim \exists x \exists y \neg P(x, y) \vee \forall z R(z) \sim$

$\sim \exists x \exists y \neg P(y, x) \vee \forall z R(z) \sim \exists x \exists y \forall z (\neg P(y, x) \vee R(z)) \sim C$

Torej $A \sim B \sim C$.

b) (10 točk) Recimo, da za področje pogovora vzamemo naravna števila \mathbb{N} , predikatoma P in R pa damo tak pomen:

$$P(x, y) \dots x \geq y \text{ in } y \geq 3, \quad R(x) \dots x \geq 3.$$

Določi logične vrednosti izjavnih formul A, B, C in D v tej interpretaciji.

5 { Ker je $A \sim B \sim C$, določimo le A. Jasno je $\forall x \forall y P(x, y) \sim 0$,
torej $A \sim 1$ in tudi $B \sim 1$ ter $C \sim 1$.

5 { Ker $P(x, y)$ pomeni $x \geq y \geq 3$, sledi $x \geq 3$ in $y \geq 3$,
torej je implikacija v D v tej interpretaciji vedno resnična, $D \sim 1$.

c) (10 točk) Ali je formula D enakovredna katerikoli od formul A, B ali C? Če je, utemelji kot v (a) delu, sicer pa poišči interpretacijo, v kateri ima D nasprotno logično vrednost.

10 { Ni enakovredna. Vzemimo kar $P(x, y) \dots x \geq y$ in $y \geq 3$ (kot zgoraj)
ter $R \dots 0$. Tedaj je $A \sim 1$ vendar $D \sim 0$.

2. naloga (30 točk)

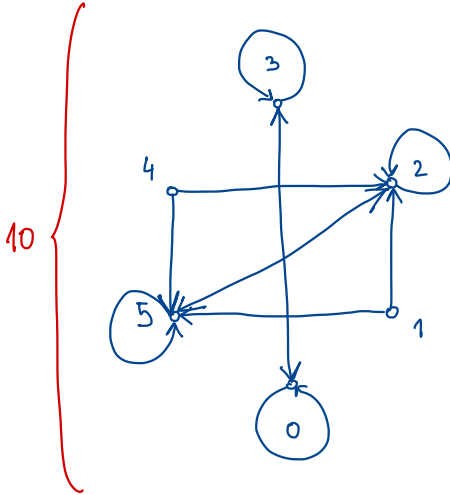
Na množici

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

je dana relacija R z opisom

$$aRb \quad \dots \quad a^2 + b \text{ je deljivo s } 3.$$

a) (10 točk) Nariši graf relacije R .



b) (10 točk) Ali je relacija R simetrična? Natančno utemelji!

10

R ni simetrična: Velja namreč $1R2$, saj je $1^2 + 2 = 3$, kar je deljivo s 3, vendar $\neg(2R1)$, saj $2^2 + 1 = 5$ ni deljivo s 3.

c) (10 točk) Ali obstaja $m > 0$, da velja $1R^m 1$? Ali obstaja $n > 0$, da velja $2R^n 2$? Natančno utemelji!

7

Ogledam si graf R . Ker se v 1 ne konča nobena puščica, ne obstaja $a \in A$, da je $aR1$. Torej tudi ne obstaja m , da je $1R^m 1$.

3

Pri 2 je drugače: $2R2$, tj. $2R^1 2$. (Velja celo $2R^n 2$ za vse n .)

3. naloga (35 točk)

Študent se mora pripraviti na dva izpita. Ima ogromno zalogo nalog, za učenje pa bo porabil točno 15 ur časa. Za rešitev ene naloge iz MAT potrebuje 16 minut, za rešitev ene naloge iz DS pa 18 minut.

a) (25 točk) Zapiši pripadajočo linearno diofantsko enačbo in poišči njeno splošno rešitev.

5 { $16m + 18d = 900 \quad /:2 \dots \quad 8m + 9d = 450$

\uparrow \uparrow
 št. nalog št. nalog
 iz MAT iz DS

40 { Poiščem $\gcd(9, 8) = \text{REA}$:

$9 = 9 \cdot 1 + 8 \cdot 0$
 $8 = 9 \cdot 0 + 8 \cdot 1$
 $1 = 9 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) \xrightarrow{\cdot 450} 8 \cdot (-450) + 9 \cdot 450 = 450$
 $0 = 9 \cdot (-8) + 8 \cdot 9 \xrightarrow{\cdot k} 8 \cdot 9k + 9 \cdot (-8k) = 0$ } +

$8 \cdot (\underbrace{9k - 450}_{m_k}) + 9 \cdot (\underbrace{450 - 8k}_{d_k}) = 450$

Torej: $m_k = 9k - 450$, $d_k = 450 - 8k$, $k \in \mathbb{Z}$ } splošna rešitev

b) (10 točk) Koliko nalog pri vsakem predmetu naj reši, če se želi na oba predmeta čimbolj enakovredno pripraviti (torej rešiti približno enako število nalog)?

5 { Smiselne so le rešitve $m_k \geq 0$, $d_k \geq 0$, t.j.:

$9k - 450 \geq 0 \dots k \geq 50$
 $450 - 8k \geq 0 \dots k \leq 56.25$ oz. $k \leq 56$.

5 { Da bo rešil približno enako št. nalog:

| k | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| m_k | | | | 27 | | | |
| d_k | | | | 26 | | | |

mora rešiti 27 nalog iz MAT ter 26 nalog iz DS.