Vse odgovore dobro utemelji!

1. **[30 točk]** Dan je sklep

$$p \veebar q,\ r \Rightarrow q,\ \neg s,\ \neg r \Rightarrow \neg t \quad \models \quad t \vee s \Rightarrow \neg p.$$

   (a) Utemelji, da je sklep pravilen tako, da zapišeš formalen dokaz tega sklepa.
   Namig: $p \veebar q \sim (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

   (b) Ali sklep ostane pravilen, če predpostavko $p \veebar q$ zamenjamo s $p \vee q$? Zapiši formalen dokaz ali poišči protiprimer!

20

(a) Zapišimo predpostavke:

1.	$p \veebar q$	pred.
2.	$r \Rightarrow q$	pred.
3.	$\neg s$	pred.
4.	$\neg r \Rightarrow \neg t$	pred.
5.1.	$t \vee s$	pred. PS
5.2.	t	DS(5.1, 3)
5.3.	r	MT(5.2, 4)
5.4.	q	MP(5.3, 2)
5.5.	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \sim 1.$	
5.6.	$\neg p \vee \neg q$	P_o(5.5)
5.7.	$\neg p$	DS(5.6, 5.4)
5.	$t \vee s \Rightarrow \neg p$	PS(5.1, 5.7)

Dokaz z uporabo pogojnega sklepa: → 5.1.–5.7.

$\models t \vee s \Rightarrow \neg p$

15

10

(b) Opazujemo torej sklep:

$$\underbrace{p \vee q}_{?},\ \underbrace{r \Rightarrow q}_{?},\ \underbrace{\neg s}_{?},\ \underbrace{\neg r \Rightarrow \neg t}_{?} \quad \models \quad \underbrace{t \vee s \Rightarrow \neg p}_{?}$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad\qquad 0$$

Poskusimo poiskati protiprimer:

$p \sim 1$
$t \sim 1$
$s \sim 0$
$r \sim 1$
$q \sim 1$

← S temi vrednostmi izj. spremenljivk so vse predpostavke resnične, zaključek pa neresničen. Sklep je torej napačen.

2. **[35 točk]** Preslikavi $f: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ in $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sta definirani s predpisoma

$$f(x,y) = xy \quad \text{in} \quad g(x) = (x^2, x-1).$$

(a) Poišči vse $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, za katere je $f(x,y) = 4$, in vse $x \in \mathbb{Z}$, za katere je $g(x) = (4,-3)$.

(b) Ali je f surjektivna? Ali je g injektivna?

(c) Zapiši predpisa za $f \circ g$ in $g \circ f$.

(d) Poišči preslikavo $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, za katero velja $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

10

(a) $f(x,y) = 4$ ... $xy = 4$, ker sta x,y celi števili, dobimo

$$\boxed{\begin{array}{l}(x,y) = (4,1),\ (x,y) = (1,4),\ (x,y) = (2,2), \\ (x,y) = (-4,-1),\ (x,y) = (-1,-4) \text{ in } (x,y) = (-2,-2).\end{array}}$$

$g(x) = (4,-3)$ ... $(x^2, x-1) = (4,-3)$, tj. $x^2 = 4$ in $x - 1 = -3$

$\vdots$

ta pa ustreza tudi prvi enačbi. $\to$ $\underline{x = -2}$

15

(b) f je <u>surjektivna</u>, enačba $f(x,y) = z$ oz. $xy = z$ ima vedno rešitev $(x,y) = (z,1)$, tj. vsaj eno rešitev.

g je <u>injektivna</u>, enačba $g(x) = (y,z)$ oz. $(x^2, x-1) = (y,z)$ ima kvečjemu rešitev $x = z+1$ (če je $y = (z+1)^2$, sicer nima rešitev)

5

(c) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2, x-1) = x^2(x-1)$.

$(g\circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(xy) = (x^2y^2, xy-1)$.

5

(d) V utemeljitvi surjektivnosti f smo to preslikavo že poiskali:

$\underline{h(z) = (z,1)}$.

Preverimo: $(f\circ h)(x) = f(h(x)) = f(x,1) = x\cdot 1 = x$, tj. $f\circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

3. **[35 točk]** Dijaki šole za oblikovanje so se udeležili likovne kolonije, kjer so lahko risali, slikali ali kiparili. Delavnice risanja se je udeležilo 59 dijakov, delavnice slikanja 79 dijakov in delavnice kiparjenja 57 dijakov. Risalo in slikalo je 24 dijakov, slikalo in kiparilo 31 dijakov ter risalo in kiparilo 19 dijakov. Vseh treh aktivnosti so se udeležili 3 dijaki.

(a) Koliko dijakov se je udeležilo kolonije?

(b) Koliko dijakov se je udeležilo samo ene aktivnosti?

(c) Dijaki, ki so slikali ali risali so lahko svoje izdelke odnesli domov še isti dan. Tisti, ki so kiparili, so se morali po svoje izdelke vrniti, ko so se izdelki posušili. Koliko dijakov se je torej tisti dan domov odpravilo z vsaj enim izdelkom (to pomeni, da so tisti dan risali ali slikali)?

Naj bodo R, S in K po vrsti množice dijakov, ki so (po vrsti) risali, slikali oziroma kiparili.

Iz podatkov v nalogi razberemo:

$|R| = 59$, $|S| = 79$, $|K| = 57$,

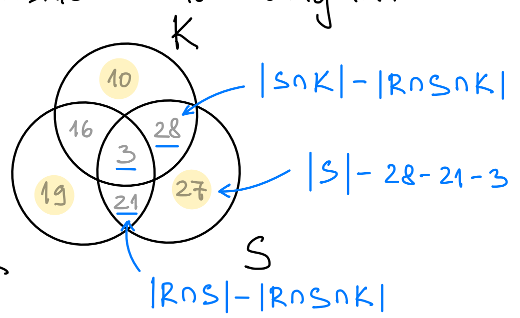
$|R \cap S| = 24$, $|R \cap K| = 19$, $|S \cap K| = 31$, $|R \cap S \cap K| = 3$.

10 (a) Zanima nas $|R \cup S \cup K|$. Po principu vključitve in izključitve je:

$$|R \cup S \cup K| = \underbrace{|R|}_{59} + \underbrace{|S|}_{79} + \underbrace{|K|}_{57} - \underbrace{|R \cap S|}_{24} - \underbrace{|R \cap K|}_{19} - \underbrace{|S \cap K|}_{31} + \underbrace{|R \cap S \cap K|}_{3} = \underline{124}.$$

Kolonije se je torej udeležilo 124 dijakov.

15 (b) Narišimo Vennov diagram:



Samo ene aktivnosti se je torej udeležilo $10 + 19 + 27 = \underline{56}$ dijakov.

10 (c) Iz zgornjega diagrama razberemo: $|R \cup S| = 19 + 21 + 27 + 16 + 3 + 28 = 114$.

$$\left(\text{Direktno: } |R \cup S| = \underbrace{|R|}_{59} + \underbrace{|S|}_{79} - \underbrace{|R \cap S|}_{24} = 114. \right)$$

Če ste (c) del razumeli, da so dijaki slikali ali risali, ne pa kiparili smo upoštevali tudi to rešitev: $|(R \cup S) \setminus K| = 19 + 21 + 27 = \underline{67}$.

$$\left(\text{Direktno: } |(R \cup S) \setminus K| = |R \cup S| - |\underbrace{(R \cup S) \cap K}_{= R \cap K \,\cup\, S \cap K}| = (*) \right.$$

$$\left. (*) = \underbrace{|R|}_{59} + \underbrace{|S|}_{79} - \underbrace{|R \cap S|}_{24} - \left(\underbrace{|R \cap K|}_{19} + \underbrace{|S \cap K|}_{31} - \underbrace{|R \cap S \cap K|}_{3} \right) = \underline{67}. \right)$$