

**Diskretne strukture: četrti izpit - računski del**

19. avgust 2022

Čas pisanja je **90 minut**.Dovoljena je uporaba **1 lista A4 formata** s formulami.Za pozitivno oceno je potrebno zbrati **vsaj 50 točk**.Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo prepovedani**.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Vse odgovore dobro utemelji!

**1. naloga (25 točk)**a) (15 točk) Dokažite, da je naslednji sklep **pravilen**.

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow r, r \Rightarrow (s \vee t), \neg s \wedge \neg u, \neg u \Rightarrow \neg t \models p.$$

1. NAČIN:

1.  $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$

2.  $r \Rightarrow (s \vee t)$

3.  $\neg s \wedge \neg u$

4.  $\neg u \Rightarrow \neg t$

5.  $\neg s$

6.  $\neg u$

7.  $\neg t$

8.  $\neg s \wedge \neg t$

9.  $\neg (s \vee t)$

10.  $\neg r$

11.  $\neg (\neg p \vee q)$

12.  $p \wedge \neg q$

13.  $p$

pred.

pred.

pred.

pred.

Po (3)

Po (3)

MP (4, 6)

Zd (5, 7)

 $\sim$  (8)

MT (2, 9)

MT (1, 10)

 $\sim$  (11)

Po (12)

15

## 2. NAČIN: sklep s protislovjem

1. $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$	pred.
2. $r \Rightarrow (s \vee t)$	pred.
3. $\neg s \wedge \neg u$	pred.
4. $\neg u \Rightarrow \neg t$	pred.
5.1 $\neg p$	pred. RA
5.2 $s \vee t$	HS (1, 2)
5.3 $\neg s$	$P_0$ (3)
5.4 $t$	DS (5.2, 5.3)
5.5 $\neg u$	$P_0$ (3)
5.6 $\neg t$	MP (4, 5.5)
5.7 $t \wedge \neg t$	Zd (5.4, 5.6)
5.8 $0$	$\sim$ (5.7)
5. $p$	RA (5.1, 5.8)

b) (10 točk) Dokažite, da naslednji sklep **ni pravilen**, tako da poiščete protiprimer.

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow r, r \Rightarrow (s \vee t), \neg s \wedge \neg u, \neg u \Rightarrow \neg t \not\models t.$$

$(\neg p \vee q) \Rightarrow r$	$\sim 1$	$\Rightarrow p \sim 1 \wedge q \sim 0$	④
$r \Rightarrow (s \vee t)$	$\sim 1$	$\Rightarrow r \sim 0$	③
$\neg s \wedge \neg u$	$\sim 1$	$\Rightarrow s \sim 0 \wedge u \sim 0$	②
$\neg u \Rightarrow \neg t$	$\sim 1$	✓	
<hr/>			
$t$	$\sim 0$	$\Rightarrow t \sim 0$	①

Protiprimer:  $p \sim 1, q \sim 0, r \sim 0, s \sim 0, u \sim 0, t \sim 0$  ⑩

2. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Pokažite, da sta izjavni formuli **enakovredni**.

$$\neg \exists x (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)) \quad \text{in} \quad \forall x (\forall z Q(z) \Rightarrow \exists y \neg P(y))$$

①. ②.

S pomočjo zakonov predikatnega računa  
①. formulo preoblikujemo v ②.:

$$\begin{aligned} \text{①.} &\sim \neg \exists x (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)) \sim \\ &\forall x \neg (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)) \sim \text{③} \\ &\forall x (\neg \forall y P(y) \vee \neg \forall z Q(z)) \sim \text{③} \\ &\forall x (\neg \forall z Q(z) \vee \neg \forall y P(y)) \sim \text{③} \\ &\forall x (\neg \forall z Q(z) \vee \exists y \neg P(y)) \sim \text{③} \\ &\forall x (\forall z Q(z) \Rightarrow \exists y \neg P(y)) \sim \text{②.} \text{③} \end{aligned}$$

b) (10 točk) Pokažite, da izjavni formuli **nista enakovredni**.

$$\neg \exists x (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)) \quad \text{in} \quad \forall x (\exists y \neg P(y) \Rightarrow \exists z \neg Q(z))$$

①. ②.

Poiščemo interpretacijo, v kateri imata izjavni formuli ①. in ②. nasprotni logični vrednosti:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{a\} \\ P(a) &\sim 1 \\ Q(a) &\sim 1 \end{aligned}$$

④

V tej interpretaciji izračunamo logično vrednost izjavnih formul ①. in ②.:

$$\text{①.} \sim \neg \exists x (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)) \sim 0 \quad \text{③}$$

$$\text{②.} \sim \forall x (\exists y \neg P(y) \Rightarrow \exists z \neg Q(z)) \sim 1 \quad \text{③}$$

3. naloga (25 točk)

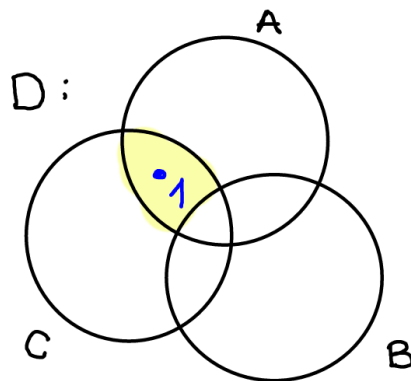
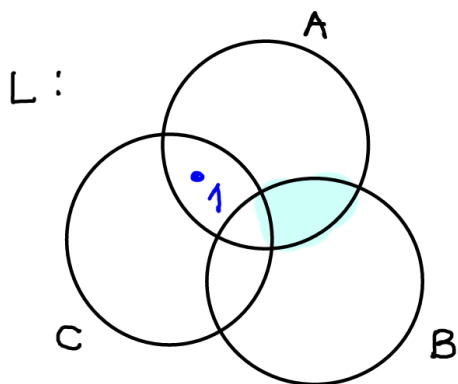
a) (15 točk) Dokažite spodnjo enakost z množicami.

$$(A \cap (B \cup C)) \setminus B = (A \cap C) \setminus B.$$

$$\begin{aligned} (A \cap (B \cup C)) \setminus B &= (A \cap (B \cup C)) \cap B^c = && \textcircled{3} \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap B^c = && \textcircled{3} \\ &= (A \cap B \cap B^c) \cup (A \cap C \cap B^c) = && \textcircled{3} \\ &= \underbrace{(A \cap B \cap B^c)}_{\emptyset} \cup (A \cap C \cap B^c) = && \textcircled{3} \\ &= (A \cap C) \cap B^c = && \textcircled{3} \\ &= (A \cap C) \setminus B && \textcircled{3} \end{aligned}$$

b) (10 točk) Ovrzite spodnjo enakost z množicami, tako da poiščete protiprimer.

$$\underbrace{(A \cap (B \cup C)) \setminus C}_L = \underbrace{(A \cap C) \setminus B}_D.$$



Protiprimer:  $A = \{1\}$ ,  $B = \emptyset$ ,  $C = \{1\}$  ④

$$\begin{aligned} L &= (\{1\} \cap (\emptyset \cup \{1\})) \setminus \{1\} = (\{1\} \cap \{1\}) \setminus \{1\} = \\ &= \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset \quad \textcircled{3} \\ D &= (\{1\} \cap \{1\}) \setminus \emptyset = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\} \quad \textcircled{3} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L \\ D \end{aligned}} \right\} L \neq D$$

4. naloga (25 točk)

Dana je linearna diofantska enačba  $258x + 147y = 369$ .

a) (15 točk) Z uporabo razširjenega Evklidovega algoritma poiščite  $\gcd(258, 147)$ .

I	$1 \cdot 258 + 0 \cdot 147 = 258$	} ③	
II	$0 \cdot 258 + 1 \cdot 147 = 147$		
III = I - 1II	$1 \cdot 258 + (-1) \cdot 147 = 111$	③	$258 = 1 \cdot 147 + 111$
IV = II - 1III	$(-1) \cdot 258 + 2 \cdot 147 = 36$	③	$147 = 1 \cdot 111 + 36$
V = III - 3IV	$4 \cdot 258 + (-7) \cdot 147 = 3$	③	$111 = 3 \cdot 36 + 3$
VI = IV - 12V	$(-49) \cdot 258 + 86 \cdot 147 = 0$	③	$36 = 12 \cdot 3 + 0$

$\gcd(258, 147) = 3$

b) (10 točk) Poiščite vse rešitve dane linearne diofantske enačbe.

Dana LDE je rešljiva, saj  $\gcd(258, 147) = 3$  deli 369.

Osnovna rešitev:

$$4 \cdot 258 + (-7) \cdot 147 = 3 \quad / \cdot 123$$

$$492 \cdot 258 + (-861) \cdot 147 = 369 \quad \textcircled{2}$$

Iščemo splošno rešitev:

$$369 = 369 + t \cdot 0 \quad t \in \mathbb{Z} \quad \textcircled{2}$$

$$369 = 492 \cdot 258 + (-861) \cdot 147 + t \cdot (-49 \cdot 258 + 86 \cdot 147) \quad \textcircled{2}$$

$$369 = (492 - 49t) \cdot 258 + (-861 + 86t) \cdot 147 \quad \textcircled{2}$$

Splošna rešitev:  $(x, y) = (492 - 49t, -861 + 86t)$ ;  
 $t \in \mathbb{Z} \quad \textcircled{2}$