Izredni rok iz DS - teoretični del, 24.03.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. **[30 točk]**

(a) Za vsakega od izjavnih izrazov $p \Leftrightarrow p$ in $p \Leftrightarrow p \Leftrightarrow p$ navedite, ali je tavtologija. Odgovora utemeljite.

Rešitev. Ker je $1 \Leftrightarrow 1 \sim 1$ in $0 \Leftrightarrow 0 \sim 1$, je izraz $p \Leftrightarrow p$ tavtologija. Ker je

$$(0 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow 0 \ \sim \ 1 \Leftrightarrow 0 \ \sim \ 0,$$

izraz $p \Leftrightarrow p \Leftrightarrow p$ ni tavtologija.

(b) Naj bosta p in r izjavni spremenljivki. Ali obstaja izjavni izraz $I(p)$, tako da je izjavni izraz

$$I(p) \vee r$$

tavtologija? Če je odgovor da, navedite primer takega izjavnega izraza, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Če za $I(p)$ vzamemo katerokoli tavtologijo, bo izraz $I(p) \vee r$ tavtologija. $I(p)$ je npr. 1, $p \vee \neg p$, $p \Leftrightarrow p$, $\ldots$

(c) Napišite preneksno normalno obliko izjavne formule

$$\neg \forall x \exists y : (P(x) \wedge Q(y)).$$

Rešitev. $\exists x \forall y : (\neg P(x) \vee \neg Q(y))$.

---

2. **[30 točk]**

(a) Dana je množica $B = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a, 1\}\}, \{a, \{a, 1\}\}\}$. Ali je B potenčna množica neke množice A? Če je odgovor da, navedite množico A, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Za množico $A = \{a, \{a, 1\}\}$ velja $\mathcal{P}(A) = B$.

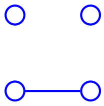
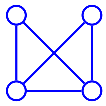
(b) Dana je množica $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Preslikava $f : C \to C$ zadošča pogojem $f(1) = 2$, $f(4) = 5$ in $f \circ f = \mathrm{id}_C$. Določite $f(2), f(3), f(5)$.

Rešitev. Iz pogoja $f \circ f = \mathrm{id}_C$ sledi $f(2) = 1$ in $f(5) = 4$. Iz bijektivnosti pa sledi še $f(3) = 3$.

(c) Relacija $\mathcal{R}$ na množici grafov (neusmerjeni, brez zank in brez večkratnih povezav) je podana s predpisom

$$G \,\mathcal{R}\, H \qquad \Leftrightarrow \qquad |V(G)| = |V(H)| \quad \text{in} \quad ||E(G)| - |E(H)|| = 2.$$

Narišite 2 neizomorfna grafa, ki sta v relaciji $\mathcal{R}$ z grafom P_4 (pot na 4 točkah).

Rešitev. G_1:  G_2: 

---

3. **[40 točk]**

(a) Naj bosta a in b števili, za kateri velja $\gcd(a, b) = 2$. Koliko celoštevilskih rešitev ($x, y \in \mathbb{Z}$) ima enačba $ax + by = 2022$? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ker $\gcd(a, b) = 2$ deli 2022, je enačba rešljiva nad $\mathbb{Z}$, rešitev pa je neskončno mnogo.

(b) Ali obstajata naravni števili a in b, za kateri velja $\gcd(a, b) = 2^5$ in $\mathrm{lcm}(a, b) = 3^7$? Če je odgovor da, ju poiščite, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Taki naravni števili a, b ne obstajata, saj bi moral $\gcd(a, b)$ deliti $\mathrm{lcm}(a, b)$.

(c) Ali obstaja povezan graf G, ki zadošča $\chi(G) = 2022$ in $\Delta(G) = 2020$? Kot ponavadi nas zanimajo samo neusmerjeni grafi, ki nimajo zank ali večkratnih povezav. Če je odgovor da, navedite primer takega grafa, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Za povezan neusmerjen graf brez zank ali večkratnih povezav velja $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ker ne velja $2022 \leq 2021$, tak graf ne obstaja.

(d) Rešite permutacijsko enačbo $\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Rešitev. Velja $\varphi^2 = (13)(24)(567)$. Zato je $\mathcal{C}(\varphi^2) = [3, 2, 2]$. Sledi $\mathcal{C}(\varphi) = [4, 3]$. Dve rešitvi sta $\varphi = (1234)(576)$ in $\varphi = (1432)(576)$.

Izredni rok iz DS - teoretični del, **24.03.2022**

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. **[30 točk]**

(a) Za vsakega od izjavnih izrazov $p \Rightarrow p$ in $p \Rightarrow p \Leftrightarrow p$ navedite, ali je tavtologija. Odgovora utemeljite.

Rešitev. Ker je $1 \Rightarrow 1 \sim 1$ in $0 \Rightarrow 0 \sim 1$, je izraz $p \Rightarrow p$ tavtologija. Ker je

$$(0 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow 0 \ \sim \ 1 \Leftrightarrow 0 \ \sim \ 0,$$

izraz $p \Rightarrow p \Leftrightarrow p$ ni tavtologija.

(b) Naj bosta p in r izjavni spremenljivki. Ali obstaja izjavni izraz $I(p)$, tako da je izjavni izraz

$$I(p) \wedge r$$

tavtologija? Če je odgovor da, navedite primer takega izjavnega izraza, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Izraz $I(p) \wedge r$ ne bo nikoli tavtologija. Za $r = 0$ bo namreč $I(p) \wedge r \sim 0$ ne glede na $I(p)$.

(c) Napišite preneksno normalno obliko izjavne formule

$$\forall x \neg \forall y : (\neg P(x) \vee Q(y)).$$

Rešitev. $\forall x \exists y : (P(x) \wedge \neg Q(y))$.

---

2. **[30 točk]**

(a) Dana je množica $B = \{\emptyset, \{b\}, \{\{b, c\}\}, \{b, \{b, c\}\}\}$. Ali je B potenčna množica neke množice A? Če je odgovor da, navedite množico A, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Za množico $A = \{b, \{b, c\}\}$ velja $\mathcal{P}(A) = B$.

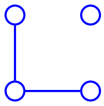
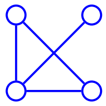
(b) Dana je množica $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Preslikava $f : C \to C$ zadošča pogojem $f(2) = 3$, $f(4) = 1$ in $f \circ f = \mathrm{id}_C$. Določite $f(1), f(3), f(5)$.

Rešitev. Iz pogoja $f \circ f = \mathrm{id}_C$ sledi $f(3) = 2$ in $f(1) = 4$. Iz bijektivnosti pa sledi še $f(5) = 5$.

(c) Relacija $\mathcal{R}$ na množici grafov (neusmerjeni, brez zank in brez večkratnih povezav) je podana s predpisom

$$G\ \mathcal{R}\ H \qquad \Leftrightarrow \qquad |V(G)| = |V(H)| \quad \text{in} \quad ||E(G)| - |E(H)|| = 1.$$

Narišite 2 neizomorfna grafa, ki sta v relaciji $\mathcal{R}$ z grafom P_4 (pot na 4 točkah).

Rešitev. G_1:  G_2: 

---

3. **[40 točk]**

(a) Naj bosta a in b števili, za kateri velja $\gcd(a,b) = 4$. Koliko celoštevilskih rešitev $(x, y \in \mathbb{Z})$ ima enačba $ax + by = 2022$? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ker $\gcd(a,b) = 4$ ne deli 2022, enačba ni rešljiva nad $\mathbb{Z}$.

(b) Ali obstajata naravni števili a in b, za kateri velja $\gcd(a,b) = 2^5$ in $\text{lcm}(a,b) = 5^6$? Če je odgovor da, ju poiščite, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Taki naravni števili a, b ne obstajata, saj bi moral $\gcd(a,b)$ deliti $\text{lcm}(a,b)$.

(c) Ali obstaja povezan graf G, ki zadošča $\chi(G) = 2022$ in $\Delta(G) = 2021$? Kot ponavadi nas zanimajo samo neusmerjeni grafi, ki nimajo zank ali večkratnih povezav. Če je odgovor da, navedite primer takega grafa, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Obstaja. Tak graf je poln graf na 2022 točkah.

(d) Rešite permutacijsko enačbo $\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Rešitev. Velja $\varphi^2 = (15)(23)(467)$. Zato je $\mathcal{C}(\varphi^2) = [3,2,2]$. Sledi $\mathcal{C}(\varphi) = [4,3]$. Dve rešitvi sta $\varphi = (1253)(476)$ in $\varphi = (1352)(476)$.

Izredni rok iz DS - teoretični del, 24.03.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. **[30 točk]**

(a) Ali je izjavni izraz $p \Rightarrow p \vee p$ tavtologija? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ker je $1 \Rightarrow (1 \vee 1) \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$ in $0 \Rightarrow (0 \vee 0) \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1$, je izraz $p \Rightarrow p \vee p$ tavtologija.

(b) Naj bosta p in r izjavni spremenljivki. Ali obstaja izjavni izraz $I(p)$, tako da je izjavni izraz

$$I(p) \Rightarrow r$$

tavtologija? Če je odgovor da, navedite primer takega izjavnega izraza, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Če za $I(p)$ vzamemo katerokoli protislovje, bo izraz $I(p) \Rightarrow r$ tavtologija. $I(p)$ je npr. 0, $p \wedge \neg p$, $p \Leftrightarrow \neg p$, ...

(c) Napišite preneksno normalno obliko izjavne formule

$$\exists x \neg \forall y : (P(x) \Rightarrow Q(y)).$$

Rešitev. $\exists x \exists y : (P(x) \wedge \neg Q(y))$.

---

2. **[30 točk]**

(a) Dana je množica $B = \{\emptyset, \{c\}, \{\{c, e\}\}, \{c, \{c, e\}\}\}$. Ali je B potenčna množica neke množice A? Če je odgovor da, navedite množico A, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Za množico $A = \{c, \{c, e\}\}$ velja $\mathcal{P}(A) = B$.

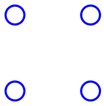
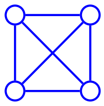
(b) Dana je množica $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Preslikava $f : C \to C$ zadošča pogojem $f(3) = 4$, $f(5) = 1$ in $f \circ f = \mathrm{id}_C$. Določite $f(1), f(2), f(4)$.

Rešitev. Iz pogoja $f \circ f = \mathrm{id}_C$ sledi $f(4) = 3$ in $f(1) = 5$. Iz bijektivnosti pa sledi še $f(2) = 2$.

(c) Relacija $\mathcal{R}$ na množici grafov (neusmerjeni, brez zank in brez večkratnih povezav) je podana s predpisom

$$G \,\mathcal{R}\, H \qquad \Leftrightarrow \qquad |V(G)| = |V(H)| \quad \text{in} \quad ||E(G)| - |E(H)|| = 3.$$

Narišite 2 neizomorfna grafa, ki sta v relaciji $\mathcal{R}$ z grafom P_4 (pot na 4 točkah).

Rešitev. G_1:  G_2: 

---

3. **[40 točk]**

(a) Naj bosta a in b števili, za kateri velja $\gcd(a, b) = 1011$. Koliko celoštevilskih rešitev ($x, y \in \mathbb{Z}$) ima enačba $ax + by = 2022$? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ker $\gcd(a, b) = 1011$ deli 2022, ima enačba neskončno celoštevilskih rešitev.

(b) Ali obstajata naravni števili a in b, za kateri velja $\gcd(a, b) = 7^3$ in $\text{lcm}(a, b) = 3^7$? Če je odgovor da, ju poiščite, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Taki naravni števili a, b ne obstajata, saj bi moral $\gcd(a, b)$ deliti $\text{lcm}(a, b)$.

(c) Ali obstaja povezan graf G, ki zadošča $\chi(G) = 2023$ in $\Delta(G) = 2022$? Kot ponavadi nas zanimajo samo neusmerjeni grafi, ki nimajo zank ali večkratnih povezav. Če je odgovor da, navedite primer takega grafa, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Obstaja. Tak graf je poln graf na 2023 točkah.

(d) Rešite permutacijsko enačbo $\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Rešitev. Velja $\varphi^2 = (57)(46)(123)$. Zato je $\mathcal{C}(\varphi^2) = [3, 2, 2]$. Sledi $\mathcal{C}(\varphi) = [4, 3]$. Dve rešitvi sta $\varphi = (5476)(132)$ in $\varphi = (5674)(132)$.
