· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

1. izpit iz DS, 27.01.2020

- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Matematična indukcija in izjavni račun**

(a) [**1**] Pojasnite princip matematične indukcije.

Matematično indukcijo uporabljamo za dokazovanje trditev o naravnih števillih. Sestoji iz dveh delov - dokaza baze indukcije (veljavnost trditve za nek $n_0 \in \mathbb{N}$) in dokaza koraka indukcije (iz veljavnosti trditve za $k \in \mathbb{N}$ sledi veljavnost trditve za $k+1$).

(b) [**1**] Razvrstite izjavne veznike $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ glede na število 1 v resničnostni tabeli. Začnite s tistim, ki ima največ 1.

Največ 1 ima $\vee$, najmanj pa $\wedge$.

(c) [**1**] Naj bodo A, B, C izjavni izrazi. Obkrožite črke pred tistimi pari izjavnih izrazov, ki niso enakovredni za vse trojice A, B, C.

(i) $(A \wedge \neg B) \vee A,\ \neg B$ (ii) $\neg(\neg A \wedge B),\ A \vee \neg B$ (iii) $(A \vee B) \wedge C,\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Izraza v (i) nista enakovredna. Za $A \sim 1$ in $B \sim 1$ je $(A \wedge \neg B) \vee A \ \sim\ 1$ in $\neg B \ \sim\ 0$.

Izraza v (ii) sta enakovredna, saj velja

$$\neg(\neg A \wedge B) \ \sim\ \neg\neg A \vee \neg B \ \sim\ A \vee \neg B.$$

Izraza v (iii) sta enakovredna, saj velja

$$(A \vee B) \wedge C \ \sim\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

(d) [**2**] Naj bo $\{\triangle, \bigcirc, \otimes\}$ nek poln nabor izjavnih veznikov, $\{\bigcirc, \sqcup, *\}$ pa nabor, ki ni poln. Pod vsakega od naslednjih nabor napiši P, če je poln, N, če ni poln, in ?, če iz podatkov ni moč določiti, ali je poln.

Pozor: za vsak pravilni odgovor dobite 0.5 točke, za napačnega 0.5 točke *izgubite*. Če ne odgovorite, dobite 0 točk. Skupno pri tem delu naloge ne morete dobiti negativnega števila točka.

$$\{\triangle, \bigcirc\}, \qquad \{\bigcirc, \sqcup\}, \qquad \{\bigcirc, \sqcup, *, \otimes\}, \qquad \{\bigcirc, \sqcup, \otimes, \triangle\}.$$

- $\{\triangle, \bigcirc\}$: ?. Če od polnega nabora odvzamemo nek veznik, nov nabor ni nujno več poln.
- $\{\bigcirc, \sqcup\}$: N. Če od nepolnega nabora odvzamemo nek veznik, nov nabor ni poln.
- $\{\bigcirc, \sqcup, *, \otimes\}$: ?. Ta nabor ne vsebuje polnega nabora, niti ni podmnožica nepolnega nabora. Torej ne moremo nič sklepati o njegovi polnosti.
- $\{\bigcirc, \sqcup, \otimes, \triangle\}$: P. Ta nabor vsebuje poln nabora, torej je poln.

2. [**5 točk**] **Predikatni račun in množice**

(a) [**1**] Navedite induktivno definicijo izjavne formule. (Definicije atoma vam ni potrebno razlagati.)

Izjavne formule so definirane induktivno:

- Atomi so izjavne formule.
- Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \iff V), \ldots$$

$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$

izjavne formule.

(b) [**3**] Dane so tri izjavne formule

$$\forall x \exists y : (P(y,x) \vee Q(x)),$$

$$\forall x \exists y : (P(y,x) \vee R(z)),$$

$$\neg \forall x \exists y : P(y,x) \vee R(z).$$

V spodnji interpretaciji s področjem pogovora D z besedami zapišite pomen vsake od njih!

področje pogovora D :	množica nalog na prvem izpitu iz DS.
$R(x)$:	x je naloga iz poglavja permutacij.
$Q(x)$:	x je najzahtevnejša naloga.
$P(x,y)$:	x je zahtevnejša naloga od naloge y.
z :	naloga 6 na prvem izpitu iz DS.

- Na prvem izpitu iz DS za vsako nalogo velja naslednja trditev: Naloga je najzahtevnejša ali pa obstaja naloga, ki je zahtevnejša od nje.
- Na prvem izpitu iz DS za vsako nalogo velja naslednje trditev: Obstaja naloga, ki je zahtevnejša od nje ali pa je naloga z iz področja permutacij.
- Na prvem izpitu iz DS velja naslednja trditev: Ni res, da za vsako nalogo obstaja naloga, ki je zahtevnejša od nje ali pa je naloga z iz področja permutacij.

(c) [**1**] Tisto izjavno formulo iz prejšnje točke, ki ni v preneksni normalni formi, preoblikuj vanjo.

$\exists x \forall y : (\neg P(y,x) \wedge \neg R(z)).$

3. **[5 točk] Relacije in preslikave**

Naj bo A množica vseh obveznih predmetov na prvi stopnji Visokošolskega strokovnega študija FRI, B pa množica vseh obveznih predmetov na prvi stopnji Univerzitetnega študija FRI. Velja $A \cap B = \emptyset$. Naj bo R relacija na množici A, definirana s predpisom

$$xRy \quad \text{natanko tedaj, ko se } x \text{ in } y \text{ izvajata v istem letniku študija.}$$

Na isti način definiramo relacijo S na množici B.

(a) **[2]** Navedite definicijo ekvivalenčne relacije. Ali je R ekvivalenčna?

Ekvivalenčna relacija R je relacija na množici A, ki je refleksivna ($(x,x) \in R$ za vsak $x \in A$), simetrična ($(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ za vsaka $x, y \in A$) in tranzitivna (Za vse trojice $x, y, z \in A$ iz $(x,y) \in R$ in $(y,z) \in R$, sledi $(x,z) \in R$.). Relacija R v nalogi je ekvivalenčna.

(b) **[1]** Kaj so ekvivalenčni razredi za S?

Relacija S ima tri ekvivalenčne razrede. V prvem so obvezni predmeti, ki se izvajajo v prvem letniku prve stopnje uni študija na FRI, v drugem predmeti drugega letnika, v tretjem pa predmeti tretjega letnika.

(c) **[2]** Če A in B vložimo v $A \cup B$, potem R in S postaneta relaciji na $A \cup B$. Določite $R * S$ in R^{-2020} na množici $A \cup B$.

$R * S = \emptyset$. Ker je R ekvivalenčna relacija na A, je $R^{-2020} = (R^{-1})^{2020} = R^{2020} = R$. Torej tudi na $A \cup B$ velja $R^{-2020} = R$.

4. **[5 točk] Teorija grafov**

(a) [**1**] Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Napišite zvezo med stopnjami točk in številom povezav, ki jo podaja lema o rokovanju.

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer je V množica vozlišč, E pa množica povezav. Velja $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

(b) [**1**] Kaj pomeni, da je končno zaporedje naravnih števil grafično?

Zaporedje je grafično, če obstaja graf, katerega stopnje vozlišč so v bijektivni korespondenci z danim zaporedjem.

(c) [**1**] Obkrožite črke pred tistimi zaporedji, ki so grafična:

(i) $5, 2, 1, 0$ (ii) $3, 3, 2, 1$ (iii) $3, 3, 3, 3$ (iv) $3, 3, 1, 1$.

- Zaporedje $5, 2, 1, 0$ ni grafično, saj bi moralo biti prvo vozlišče povezano s 5 vozlišči, na razpolago pa so le 3.
- Zaporedje $3, 3, 2, 1$ ni grafično, saj vsota števil v zaporedju ni soda.
- Zaporedje $3, 3, 3, 3$ je grafično. Ustreza mu poln graf na 4 točkah.
- Po izreku je zaporedje $3, 3, 1, 1$ grafično natanko tedaj, ko je $2, 2, 0, 0$ grafično. To pa ni grafično, saj bi moralo biti prvo vozlišče povezano z dvema vozliščema, na razpolago pa je le eno.

(d) [**2**] Naj bo dano neko *padajoče* grafično zaporedje naravnih števil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, in G eden izmed pripadajočih grafov.

i. [**1**] Kaj mora veljati za števila n_i, da bo G Eulerjev?

Vsa števila n_i bi morala biti soda.

ii. [**1**] Največ koliko je kromatično število $\chi(G)$? Odgovor utemeljite.

iii. Kromatično število grafa je največ za 1 večje od stopnje največjega vozlišča, saj požrešna metoda barvanja deluje. Torej je največ $n_1 + 1$.

5. **[5 točk] Razširjen Evklidov algoritem in linearne diofantske enačbe**

(a) [**2**] Z razširjenim Evklidovim algoritmom poiščite največji skupni delitelj števil 65 in 26.

$$
\begin{aligned}
(1):& \quad 65 = 1 \cdot 65 + 0 \cdot 26, & & \\
(2):& \quad 26 = 0 \cdot 65 + 1 \cdot 26, & & 65 = 2 \cdot 26 + 13, \\
(3) = (1) - 2(2):& \quad 13 = 1 \cdot 65 - 2 \cdot 26, & & 26 = 2 \cdot 13 + 0, \\
(4) = (2) - 2(3):& \quad 0 = -2 \cdot 65 + 5 \cdot 26. & &
\end{aligned}
$$

Torej je $D(65, 26) = 13$.

(b) [**1**] Obkrožite črke pred tistimi linearnimi diofantskimi enačbami, ki nimajo nobene celoštevilske rešitve:

(i) $65x+26y = 16$ (ii) $65x+26y = 130$ (iii) $65x+26y = -39$; (iv) $65x+26y = 27$. .

Veljati mora, da $D(65, 26)$ deli desno stran enačbe. Enačbi z desno stranjo 16 oz. 27 nimata celoštevilskih rešitev, tisti z 130 in -39 pa imata celoštevilske rešitve.

(c) [**2**] Izberite eno od linearnih diofantskih enačb iz prejšnje točke, ki ima celoštevilske rešitve, in napišite formulo, ki opiše vse njene celoštevilske rešitve.

Izberimo enačbo $65x + 26y = 130$. Eno od rešitev (x_0, y_0) dobimo tako, da predzadnjo vrstico razširjenega Evklidovega algoritma pomnožimo z $\frac{130}{13} = 10$. Torej $130 = 10 \cdot 65 - 20 \cdot 26$ in zato $(x_0, y_0) = (10, -20)$. Vse rešitve pa so oblike

$$\left(x_0 + k \cdot \frac{26}{13}, y_0 - k \cdot \frac{65}{13}\right) = (10 + 2k, -20 - 5k),$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

6. [**5 točk**] **Permutacije in linearne rekurzivne enačbe**

Naj bosta

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

permutaciji.

(a) [**1**] Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti permutacije π?

Definicijsko območje in zaloga vrednosti sta $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) [**1.5**] Zapišite permutacijo π v obliki produkta disjunktnih ciklov in določite njen red.

$\pi = (1, 4, 6)(2, 5)$. Red je najmanjši skupni večkratnik dolžin ciklov, tj. 6.

(c) [**1.5**] Zapišite permutacijo π v obliki produkta transpozicij in določite njeno parnost.

$\pi = (1, 6)(1, 4)(2, 5)$. Parnost pemutacije π je liha.

(d) [**1**] Izračunajte produkt $\pi * \psi$.

$$\pi * \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$