Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

# Drugi rok iz DS - teoretični del A, 07.02.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[40 točk]**

(a) Napišite primer naravnih števil $a, b$, za kateri velja $\gcd(a, b) = 2$ in $\operatorname{lcm}(a, b) = 12$.

Rešitev. Primeri so pari $(a, b) \in \{(2, 12), (4, 6), (6, 4), (12, 2)\}$.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(b) Napišite permutacijo $\alpha$ reda 6 na množici 6 točk, ki nima ciklične struktrure $\mathcal{C}(\alpha) = [6]$.

Rešitev. Primer je npr. $\alpha = (123)(45)(6)$. Edina možna ciklična struktura je $\mathcal{C}(\alpha) = [3, 2, 1]$.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(c) Prepišite izjavno formulo

$$\exists x P(x, y) \Rightarrow \neg Q(x) \wedge R(y)$$

in dodajte oklepaje, ki nakazujejo prednostni red računanja.

Rešitev. $(\exists x P(x, y)) \Rightarrow ((\neg Q(x)) \wedge R(y))$.

Če niste nakazali z oklepajem ali pa ste narobe nakazali delovanje $\exists x$, ste dobili največ 5 točk, v kolikor so bili ostali oklepaji pravilno postavljeni. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa narobe, točk niste dobili. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa so manjkali, ste dobili 3 točke.

(d) Naj bo $\mathcal{D} = \{\text{rdeča, modra, oranžna}\}$ področje pogovora in $P, Q : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$ predikata, podana z naslednjo tabelo:

| $x$ | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|---|---|---|
| rdeča | 1 | 1 |
| modra | 1 | 0 |
| oranžna | 0 | 0 |

Ali je formula

$$\forall x \exists y : (P(x) \wedge Q(y))$$

v zgornji interpretaciji resnična? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ne, formula ni resnična. Ko ima $x$ vrednost 'oranžna', ne obstaja $y$, da bi bila izjava $P(\text{oranžna}) \wedge Q(y)$ resnična.

Če ste ugotovili neresničnost formule, vendar navedli popolnoma napačno obrazložitev, točk niste dobili. Če ste ugotovili neresničnost formule, vendar tega niste povsem pravilno utemeljili, ste lahko dobili med 4 in 7 točk (odvisno od pomanjkljivosti utemeljitve).

2. **[30 točk]** Na množici študentov, ki so se udeležili izpita iz Diskretnih struktur, definiramo relaciji $R$ in $S$:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ in } y \text{ sta dobila enako oceno,}$$
$$xSy \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rezultat } x \text{ in } y \text{ se razlikuje za največ 1 točko.}$$

(a) Določite ekvivalenčne razrede tiste izmed relacij $R$ in $S$, ki je ekvivalenčna.
Opomba. Ni vam potrebno utemeljevati, da je relacija res ekvivalenčna.

Rešitev. Ekvivalenčna relacija je $R$. Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu. Ekvivalenčni razredi so $R[5] = \{x\colon x \text{ je dobil oceno } 5\}, \ldots, R[10] = \{x\colon x \text{ je dobil oceno } 10\}$.

V kolikor ste navedli, da so ekvivalenčni razredi ocene in ne študenti, točk niste dobili. Tudi za oznake $R[5], R[6], \ldots$ brez obrazložitve, kaj pomenijo, točk niste dobili. Vse točke pa ste dobili že za utemeljitev *Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu.*

(b) Utemeljite, zakaj druga izmed relacij $R$ in $S$ ni ekvivalenčna.

Rešitev. Relacija $S$ ni ekvivalenčna, saj ni tranzitivna. Za študente $x$, $y$, $z$, ki so na izpitu dosegli 63, 64, 65 točk velja, $xSy$ in $ySz$, ne velja pa $xSz$.

Če ste navedli, da relacija $S$ ni tranzitivna, brez utemeljitve, ste dobili 3 točke. Če ste navedli, da $S$ ni refleksivna in ni tranzitivna, ter oboje razložili, ste dobili 5 točk. (Kajti $S$ je refleksivna in je bila razlaga nerefleksivnosti napačna.)

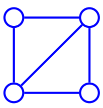
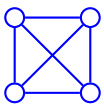
(c) Študent $x$ je dosegel na izpitu 94, študent $z$ pa 96 točk. Ali lahko z gotovostjo trdimo, da sta študenta $x$ in $z$ v relaciji $S^2$? Odgovor utemeljite.
Rešitev. $x$ in $z$ sta v relaciji $S^2$ natanko tedaj, ko obstaja $y$, da velja $xSy$ in $ySz$. Tak $y$ bo obstajal, če se bo njegov rezultat razlikoval največ za 1 točko od 94 in 96. Torej bosta $x$ in $z$ v relaciji $S^2$ natanko tedaj, ko obstaja študent, ki je na izpitu dosegel 95 točk.

Če ste ugotovili, da mora za to, da sta $x$ in $z$ v relaciji $S^2$, obstajati študent, ki je dosegel 95 točk in iz tega zaključili, da sta $x$ in $z$ gotovo v relaciji, ste dobili 7 točk.

---

3. **[30 točk]** Vsi grafi v tej nalogi naj imajo neusmerjene povezave, nimajo zank in nimajo večkratnih povezav.

(a) Narišite dva neizomorfna grafa s 4 vozlišči, ki sta Hamiltonova, a nista Eulerjeva.

Rešitev.  

Za vsakega od neizomorfnih grafov (lahko sta bili tudi drugačna kot v rešitvah), ste dobili 5 točk.

(b) Razložite, kaj v Brooksovem izreku ne velja v primeru, ko je $G$ lih cikel.

Rešitev. V primeru, ko je $G$ lih cikel, ne velja desna neenakost $\chi(G) \leq \Delta(G)$ v Brooksovem izreku, saj je $\chi(G) = 3$ in $\Delta(G) = 2$.

Za trditev, da ne velja $\chi(G) \leq \Delta(G)$, ste dobili 5 točk. Če ste še navedli, da je $\chi(G) = 3$ in $\Delta(G) = 2$, ste dobili še 5 točk.

(c) Naj bo $G$ graf s 27 vozlišči in kromatičnim številom $\chi(G) = 2$. Ali je $G$ lahko Hamiltonov? Če je odgovor da, napišite primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Ker je $\chi(G) = 2$, je $G$ dvodelen. Ker je vozlišč liho mnogo, barvna razreda nista enako velika. Za take grafe pa vemo (npr. z uporabo izreka o razpadu, kjer za prerezno množico vzamemo barvni razred z manjšim številom točk), da niso Hamiltonovi.

Če ste narisali cikel na 27 točkah in barvali točke z dvema barvama, ter ugotovili da to ne gre, ste prav tako dobili vse točke.

Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: ____________________

# Drugi rok iz DS - teoretični del B, 07.02.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[40 točk]**

(a) Napišite primer naravnih števil $a, b$, za kateri velja $\gcd(a, b) = 2$ in $\operatorname{lcm}(a, b) = 20$.

Rešitev. Primeri so pari $(a, b) \in \{(2, 20), (4, 10), (10, 4), (20, 2)\}$.

(b) Napišite permutacijo $\alpha$ reda 6 na množici 5 točk.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

Rešitev. Primer je npr. $\alpha = (123)(45)$. Edina možna ciklična struktura je $\mathcal{C}(\alpha) = [3, 2]$.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(c) Prepišite izjavno formulo

$$\forall x Q(x) \land \neg R(y) \Rightarrow P(x, y)$$

in dodajte oklepaje, ki nakazujejo prednostni red računanja.

Rešitev. $((\forall x Q(x)) \land (\neg R(y))) \Rightarrow P(x, y)$

Če niste nakazali z oklepajem ali pa ste narobe nakazali delovanje $\forall x$, ste dobili največ 5 točk, v kolikor so bili ostali oklepaji pravilno postavljeni. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa narobe, točk niste dobili. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa so manjkali, ste dobili 3 točke.

(d) Naj bo $\mathcal{D} = \{\text{rdeča, modra, oranžna}\}$ področje pogovora in $P, Q : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$ predikata, podana z naslednjo tabelo:

| $x$ | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|---|---|---|
| rdeča | 1 | 1 |
| modra | 0 | 0 |
| oranžna | 0 | 1 |

Ali je formula

$$\exists x \forall y : (P(x) \lor Q(y))$$

v zgornji interpretaciji resnična? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Da, formula je resnična. Ko ima $x$ vrednost 'rdeča', je za vsak $y$ izjava $P(\text{rdeča}) \lor Q(y)$ resnična.

Če ste ugotovili resničnost formule, vendar navedli popolnoma napačno obrazložitev, točk niste dobili. Če ste ugotovili resničnost formule, vendar tega niste povsem pravilno utemeljili, ste lahko dobili med 4 in 7 točk (odvisno od pomanjkljivosti utemeljitve).

---

2. **[30 točk]** Na množici študentov, ki so se udeležili izpita iz Diskretnih struktur, definiramo relaciji $R$ in $S$:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rezultat } x \text{ in } y \text{ se razlikuje za največ 1 točko.}$$
$$xSy \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ in } y \text{ sta dobila enako oceno.}$$

(a) Določite ekvivalenčne razrede tiste izmed relacij $R$ in $S$, ki je ekvivalenčna.
Opomba. Ni vam potrebno utemeljevati, da je relacija res ekvivalenčna.

Rešitev. Ekvivalenčna relacija je $S$. Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu. Ekvivalenčni razredi so $S[5] = \{x\colon x \text{ je dobil oceno } 5\}$, ..., $S[10] = \{x\colon x \text{ je dobil oceno } 10\}$.

V kolikor ste navedli, da so ekvivalenčni razredi ocene in ne študenti, točk niste dobili. Tudi za oznake $S[5], S[6], \ldots$ brez obrazložitve, kaj pomenijo, točk niste dobili. Vse točke pa ste dobili že za utemeljitev *Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu.*

(b) Utemeljite, zakaj druga izmed relacij $R$ in $S$ ni ekvivalenčna.

Rešitev. Relacija $R$ ni ekvivalenčna, saj ni tranzitivna. Za študente $x$, $y$, $z$, ki so na izpitu dosegli 63, 64, 65 točk velja, $xRy$ in $yRz$, ne velja pa $xRz$.

Če ste navedli, da relacija $R$ ni tranzitivna, brez utemeljitve, ste dobili 3 točke. Če ste navedli, da $R$ ni refleksivna in ni tranzitivna, ter oboje razložili, ste dobili 5 točk. (Kajti $R$ je refleksivna in je bila razlaga nerefleksivnosti napačna.)

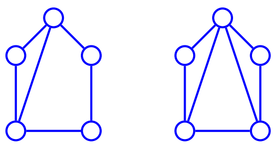
(c) Študent $x$ je dosegel na izpitu 86, študent $z$ pa 88 točk. Ali lahko z gotovostjo trdimo, da sta študenta $x$ in $z$ v relaciji $R^2$? Odgovor utemeljite.
Rešitev. $x$ in $z$ sta v relaciji $R^2$ natanko tedaj, ko obstaja $y$, da velja $xRy$ in $yRz$. Tak $y$ bo obstajal, če se bo njegov rezultat razlikoval največ za 1 točko od 86 in 88. Torej bosta $x$ in $z$ v relaciji $R^2$ natanko tedaj, ko obstaja študent, ki je na izpitu dosegel 87 točk.

Če ste ugotovili, da mora za to, da sta $x$ in $z$ v relaciji $R^2$, obstajati študent, ki je dosegel 95 točk in iz tega zaključili, da sta $x$ in $z$ gotovo v relaciji, ste dobili 7 točk.

---

3. **[30 točk]** Vsi grafi v tej nalogi naj imajo neusmerjene povezave, nimajo zank in nimajo večkratnih povezav.

(a) Narišite dva neizomorfna grafa s 5 vozlišči, ki sta Hamiltonova, a nista Eulerjeva.

Rešitev. 

Za vsakega od neizomorfnih grafov (lahko sta bili tudi drugačna kot v rešitvah), ste dobili 5 točk.

(b) Razložite, kaj v Brooksovem izreku ne velja v primeru, ko je $G$ poln graf.

Rešitev. V primeru, ko je $G$ poln graf, ne velja desna neenakost $\chi(G) \leq \Delta(G)$ v Brooksovem izreku, saj je $\chi(G) = |V(G)|$ in $\Delta(G) = |V(G)| - 1$.

Za trditev, da ne velja $\chi(G) \leq \Delta(G)$, ste dobili 5 točk. Če ste še navedli, da je $\chi(G) = |V(G)|$ in $\Delta(G) = |V(G)| - 1$, ste dobili še 5 točk.

(c) Naj bo $G$ graf s 43 vozlišči in kromatičnim številom $\chi(G) = 2$. Ali je $G$ lahko Hamiltonov? Če je odgovor da, napišite primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Ker je $\chi(G) = 2$, je $G$ dvodelen. Ker je vozlišč liho mnogo, barvna razreda nista enako velika. Za take grafe pa vemo (npr. z uporabo izreka o razpadu, kjer za prerezno množico vzamemo barvni razred z manjšim številom točk), da niso Hamiltonovi.

Če ste narisali cikel na 43 točkah in barvali točke z dvema barvama, ter ugotovili da to ne gre, ste prav tako dobili vse točke.

Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

# Drugi rok iz DS - teoretični del C, 07.02.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[40 točk]**

(a) Napišite primer naravnih števil $a, b$, za kateri velja $\gcd(a, b) = 2$ in $\text{lcm}(a, b) = 12$.

Rešitev. Primeri so pari $(a, b) \in \{(2, 12), (4, 6), (6, 4), (12, 2)\}$.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(b) Napišite permutacijo $\alpha$ reda 6 na množici 6 točk, ki nima ciklične struktrure $\mathcal{C}(\alpha) = [6]$.

Rešitev. Primer je npr. $\alpha = (123)(45)(6)$. Edina možna ciklična struktura je $\mathcal{C}(\alpha) = [3, 2, 1]$.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(c) Prepišite izjavno formulo

$$\exists x P(x, y) \Rightarrow \neg Q(x) \wedge R(y)$$

in dodajte oklepaje, ki nakazujejo prednostni red računanja.

Rešitev. $(\exists x P(x, y)) \Rightarrow ((\neg Q(x)) \wedge R(y))$ .

Če niste nakazali z oklepajem ali pa ste narobe nakazali delovanje $\exists x$, ste dobili največ 5 točk, v kolikor so bili ostali oklepaji pravilno postavljeni. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa narobe, točk niste dobili. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa so manjkali, ste dobili 3 točke.

(d) Naj bo $\mathcal{D} = \{\text{rdeča, modra, oranžna}\}$ področje pogovora in $P, Q : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$ predikata, podana z naslednjo tabelo:

| $x$ | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|---|---|---|
| rdeča | 1 | 1 |
| modra | 1 | 0 |
| oranžna | 0 | 0 |

Ali je formula

$$\forall x \exists y : (P(x) \wedge Q(y))$$

v zgornji interpretaciji resnična? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ne, formula ni resnična. Ko ima $x$ vrednost 'oranžna', ne obstaja $y$, da bi bila izjava $P(\text{oranžna}) \wedge Q(y)$ resnična.

Če ste ugotovili neresničnost formule, vendar navedli popolnoma napačno obrazložitev, točk niste dobili. Če ste ugotovili neresničnost formule, vendar tega niste povsem pravilno utemeljili, ste lahko dobili med 4 in 7 točk (odvisno od pomanjkljivosti utemeljitve).

2. **[30 točk]**

(a) Določite množico $A$ tako, da bo imela množica $\mathbb{N} \times A$ končno mnogo elementov. Napišite še, kaj je množica $\mathbb{N} \times A$.

Rešitev. $A = \emptyset$ in $\mathbb{N} \times A = \emptyset$. Če ima $A$ vsaj en element, je množica $\mathbb{N} \times A$ neskončna.

Za vsako od ugotovitev $A = \emptyset$ in $\mathbb{N} \times A = \emptyset$ ste dobili po 5 točk.

(b) Naj bo $B$ množica dvomestnih izjavnih veznikov. Napišite tri elemente iz množice $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times B)$.

Rešitev. $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times B) = \{\emptyset, \mathbb{N} \times B, \{(1, \wedge)\}, \{(1, \wedge), (1, \vee)\}, \ldots\}$.

Če ste navedli 3 elemente iz $\mathbb{N} \times B$, ste dobili 5 točk. Če ste navedli, da so elementi oblike $\{1, \wedge\}$ (tj. pozabili ste na oklepaje), ste dobili 5 točk.

(c) Naj bo $C$ množica tromestnih izjavnih veznikov in $f : \mathbb{N} \to C$ preslikava. Ali je $f$ lahko injektivna? Če je odgovor da, napišite primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. $f$ ne more biti injektivna, saj je njena domena neskončna množica $\mathbb{N}$, njena kodomena pa končna množica $C$.

Pri tej nalogi vmesnih točk ni bilo. Pravilen odgovor brez utemeljitve ni prinesel točk.

---

3. **[30 točk]** Na množici študentov, ki so se udeležili izpita iz Diskretnih struktur, definiramo relaciji $R$ in $S$:

$$\begin{aligned} xRy &\quad\Leftrightarrow\quad x \text{ in } y \text{ sta dobila enako oceno,} \\ xSy &\quad\Leftrightarrow\quad \text{Rezultat } x \text{ in } y \text{ se razlikuje za največ 1 točko.} \end{aligned}$$

(a) Določite ekvivalenčne razrede tiste izmed relacij $R$ in $S$, ki je ekvivalenčna.
Opomba. Ni vam potrebno utemeljevati, da je relacija res ekvivalenčna.

Rešitev. Ekvivalenčna relacija je $R$. Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu. Ekvivalenčni razredi so $R[5] = \{x \colon x \text{ je dobil oceno } 5\}$, ..., $R[10] = \{x \colon x \text{ je dobil oceno } 10\}$.

V kolikor ste navedli, da so ekvivalenčni razredi ocene in ne študenti, točk niste dobili. Tudi za oznake $R[5], R[6], \ldots$ brez obrazložitve, kaj pomenijo, točk niste dobili. Vse točke pa ste dobili že za utemeljitev *Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu.*

(b) Utemeljite, zakaj druga izmed relacij $R$ in $S$ ni ekvivalenčna.

Rešitev. Relacija $S$ ni ekvivalenčna, saj ni tranzitivna. Za študente $x$, $y$, $z$, ki so na izpitu dosegli 63, 64, 65 točk velja, $xSy$ in $ySz$, ne velja pa $xSz$.

Če ste navedli, da relacija $S$ ni tranzitivna, brez utemeljitve, ste dobili 3 točke. Če ste navedli, da $S$ ni refleksivna in ni tranzitivna, ter oboje razložili, ste dobili 5 točk. (Kajti $S$ je refleksivna in je bila razlaga nerefleksivnosti napačna.)

(c) Študent $x$ je dosegel na izpitu 94, študent $z$ pa 96 točk. Ali lahko z gotovostjo trdimo, da sta študenta $x$ in $z$ v relaciji $S^2$? Odgovor utemeljite.

Rešitev. $x$ in $z$ sta v relaciji $S^2$ natanko tedaj, ko obstaja $y$, da velja $xSy$ in $ySz$. Tak $y$ bo obstajal, če se bo njegov rezultat razlikoval največ za 1 točko od 94 in 96. Torej bosta $x$ in $z$ v relaciji $S^2$ natanko tedaj, ko obstaja študent, ki je na izpitu dosegel 95 točk.

Če ste ugotovili, da mora za to, da sta $x$ in $z$ v relaciji $S^2$, obstajati študent, ki je dosegel 95 točk in iz tega zaključili, da sta $x$ in $z$ gotovo v relaciji, ste dobili 7 točk.

Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

# Drugi rok iz DS - teoretični del D, 07.02.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[40 točk]**

(a) Napišite primer naravnih števil $a, b$, za kateri velja $\gcd(a, b) = 2$ in $\mathrm{lcm}(a, b) = 20$.

Rešitev. Primeri so pari $(a, b) \in \{(2, 20), (4, 10), (10, 4), (20, 2)\}$.

(b) Napišite permutacijo $\alpha$ reda 6 na množici 5 točk.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

Rešitev. Primer je npr. $\alpha = (123)(45)$. Edina možna ciklična struktura je $\mathcal{C}(\alpha) = [3, 2]$.

Za nepravilne rešitve vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(c) Prepišite izjavno formulo

$$\forall x Q(x) \wedge \neg R(y) \Rightarrow P(x, y)$$

in dodajte oklepaje, ki nakazujejo prednostni red računanja.

Rešitev. $((\forall x Q(x)) \wedge (\neg R(y))) \Rightarrow P(x, y)$

Če niste nakazali z oklepajem ali pa ste narobe nakazali delovanje $\forall x$, ste dobili največ 5 točk, v kolikor so bili ostali oklepaji pravilno postavljeni. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa narobe, točk niste dobili. Če je bil pravilno postavljen samo en oklepaj, ostali pa so manjkali, ste dobili 3 točke.

(d) Naj bo $\mathcal{D} = \{\text{rdeča, modra, oranžna}\}$ področje pogovora in $P, Q : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$ predikata, podana z naslednjo tabelo:

| $x$ | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|---|---|---|
| rdeča | 1 | 1 |
| modra | 0 | 0 |
| oranžna | 0 | 1 |

Ali je formula

$$\exists x \forall y : (P(x) \vee Q(y))$$

v zgornji interpretaciji resnična? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Da, formula je resnična. Ko ima $x$ vrednost 'rdeča', je za vsak $y$ izjava $P(\text{rdeča}) \vee Q(y)$ resnična.

Če ste ugotovili resničnost formule, vendar navedli popolnoma napačno obrazložitev, točk niste dobili. Če ste ugotovili resničnost formule, vendar tega niste povsem pravilno utemeljili, ste lahko dobili med 4 in 7 točk (odvisno od pomanjkljivosti utemeljitve).

---

2. **[30 točk]**

(a) Določite množico $A$ tako, da bo imela množica $\{1, 2, 3\} \times A$ neskončno mnogo elementov.

Rešitev. Npr. $A = \mathbb{N}$. Katerakoli neskončna množica je ustrezna. Če ima $A$ končno mnogo elementov, bo imela tudi množica $\{1, 2, 3\} \times A$ končno mnogo elementov.

Katera koli neskončna množica za $A$ je prinesla 10 točk. Vmesnih točk ni bilo.

(b) Naj bo $B$ množica dvomestnih izjavnih veznikov. Napišite tri elemente iz množice $\mathcal{P}(B \times \mathbb{N})$.

Rešitev. $\mathcal{P}(B \times \mathbb{N}) = \{\emptyset, B \times \mathbb{N}, \{(\wedge, 1)\}, \{(\wedge, 1), (\vee, 1)\}, \dots\}$.

Če ste navedli 3 elemente iz $B \times \mathbb{N}$, ste dobili 5 točk. Če ste navedli, da so elementi oblike $\{\wedge, 1\}$ (tj. pozabili ste na oklepaje), ste dobili 5 točk.

(c) Naj bo $C$ množica tromestnih izjavnih veznikov in $f : C \to \mathbb{N}$ preslikava. Ali je $f$ lahko surjektivna? Če je odgovor da, napišite primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. $f$ ne more biti surjektivna, saj je njena domena končna množica $C$, njena kodomena pa neskončna množica $\mathbb{N}$.

Pri tej nalogi vmesnih točk ni bilo. Pravilen odgovor brez utemeljitve ni prinesel točk.

---

3. **[30 točk]** Na množici študentov, ki so se udeležili izpita iz Diskretnih struktur, definiramo relaciji $R$ in $S$:

$$
\begin{aligned}
xRy \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Rezultat } x \text{ in } y \text{ se razlikuje za največ 1 točko.} \\
xSy \quad &\Leftrightarrow \quad x \text{ in } y \text{ sta dobila enako oceno.}
\end{aligned}
$$

(a) Določite ekvivalenčne razrede tiste izmed relacij $R$ in $S$, ki je ekvivalenčna.
Opomba. Ni vam potrebno utemeljevati, da je relacija res ekvivalenčna.

Rešitev. Ekvivalenčna relacija je $S$. Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu. Ekvivalenčni razredi so $S[5] = \{x \colon x \text{ je dobil oceno } 5\}$, ..., $S[10] = \{x \colon x \text{ je dobil oceno } 10\}$.

V kolikor ste navedli, da so ekvivalenčni razredi ocene in ne študenti, točk niste dobili. Tudi za oznake $S[5], S[6], \dots$ brez obrazložitve, kaj pomenijo, točk niste dobili. Vse točke pa ste dobili že za utemeljitev *Vsi študentje, ki so na izpitu dobili enako oceno, so v istem ekvivalenčnem razredu.*

(b) Utemeljite, zakaj druga izmed relacij $R$ in $S$ ni ekvivalenčna.

Rešitev. Relacija $R$ ni ekvivalenčna, saj ni tranzitivna. Za študente $x$, $y$, $z$, ki so na izpitu dosegli 63, 64, 65 točk velja, $xRy$ in $yRz$, ne velja pa $xRz$.

Če ste navedli, da relacija $R$ ni tranzitivna, brez utemeljitve, ste dobili 3 točke. Če ste navedli, da $R$ ni refleksivna in ni tranzitivna, ter oboje razložili, ste dobili 5 točk. (Kajti $R$ je refleksivna in je bila razlaga nerefleksivnosti napačna.)

(c) Študent $x$ je dosegel na izpitu 86, študent $z$ pa 88 točk. Ali lahko z gotovostjo trdimo, da sta študenta $x$ in $z$ v relaciji $R^2$? Odgovor utemeljite.

Rešitev. $x$ in $z$ sta v relaciji $R^2$ natanko tedaj, ko obstaja $y$, da velja $xRy$ in $yRz$. Tak $y$ bo obstajal, če se bo njegov rezultat razlikoval največ za 1 točko od 86 in 88. Torej bosta $x$ in $z$ v relaciji $R^2$ natanko tedaj, ko obstaja študent, ki je na izpitu dosegel 87 točk.

Če ste ugotovili, da mora za to, da sta $x$ in $z$ v relaciji $R^2$, obstajati študent, ki je dosegel 95 točk in iz tega zaključili, da sta $x$ in $z$ gotovo v relaciji, ste dobili 7 točk.