DVODELNI GRAFI

Graf $G = (V, E)$ je *dvodelen*, če lahko točke grafa $V(G)$ razbijemo na dve podmnožici $V(G) = A \cup B$ z lastnostjo, da ima vsaka povezava $e = uv$ v grafu G krajišči v različnih členih razbitja $A \cup B$.

Pogovorno pravimo, da smo točke grafa obarvali z dvema barvama (denimo, da imenujemo točke iz A *bele*, točke iz B pa *črne*), pri čemer naj ima vsaka povezava krajišči različnih barv.

Kateri znani grafi so dvodelni? Drevesa, poti, polni dvodelni grafi (odtod ime, mar ne), cikli sode dolžine, hiperkocke Q_d.

Zakaj slednje? Standardno za točke hiperkocke Q_d izberemo 0/1 zaporedja dolžine d, pri čemer sta točki-zaporedji sosedi natanko tedaj, ko se razlikujeta v eni sami koordinati. Sprememba ene koordinate pomeni spremembo ene enice v ničlo ali obratno. Pri tem pa spremenimo parnost števila enic v zaporedju. Torej: točke hiperkocke Q_d lahko imenujemo *sode* oziroma *lihe* glede na parnost števila enic v zaporedju-točki. Sosedi, ker se razlikujeta v natančno eni koordinati, bosta vedno različnih parnosti-barv.

Kateri znani grafi niso dvodelni? Polni grafi (na vsaj 3 točkah), cikli lihih dolžin.

Če graf G vsebuje cikel lihe dolžine kot podgraf, potem G ni dvodelen. Velja pa tudi obrat, cikli lihih dolžin so edine ovire za dvodelnost grafa.

Izrek 1 *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje nobenega lihega cikla kot podgraf.*

Z dokazom izreka malo počakajmo. Za začetek si oglejmo tehnični rezultat

Lema 2 *Če graf G vsebuje kakšen obhod lihe dolžine, potem G vsebuje tudi cikel lihe dolžine. Natančneje, najkrajši obhod lihe dolžine v grafu G je cikel.*

Naj bo

$$O = u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_0 \tag{1}$$

najkrajši obhod lihe dolžine v grafu G.

Dolžina obhoda $|O|$ je enaka k, ki je liho število in *ni* enako 1, saj graf G nima zank. Odtod sledi, da je dolžina *vsakega* obhoda lihe dolžine v grafu G vsaj 3.

Denimo, da obhod O ni cikel. Ker O izpolnjuje pogoj $|O| \geq 3$, obhod O ni cikel zaradi ponovljenih točk. Privzamemo lahko, da se (neka) točka x vzdolž obhoda O pojavi dvakrat, $x = u_i$ in $x = u_j$, pri indeksih $i < j$.

Obhod O razcepimo na dva obhoda: $O_1 = u_0 \dots u_{i-1} x u_{j+1} \dots u_{k-1} u_0$ in $O_2 = x u_{i+1} \dots u_{j-1} x$. Obhoda O_1 in O_2 sta oba strogo krajša od O, obenem pa velja tudi $|O_1| + |O_2| = |O|$. Odtod sledi, da je natanko eden od O_1, O_2 lihe dolžine, kar je v nasprotju s predpostavko, da je O najkrajši lih obhod v grafu G. Torej je O cikel in Lema 2 je pod streho. $\square$

Za dokaz Izreka 1 je dovolj opazovati povezane grafe. Točke nepovezanega grafa lahko ustrezno obarvamo z dvema barvama natanko tedaj, ko lahko obarvamo vsako od njegovih komponent. Ravno tako je morebitni lih cikel v G vsebovan v eni od njegovih povezanih komponent.

Naj bo torej G povezan graf; izberimo poljubno točko v_0 grafa G. Naj bo $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ *razdaljna particija* točk grafa G glede na v_0: V_i je množica točk grafa G, ki od točke v_0 oddaljene natanko i. To med drugim pomeni, da je $V_0 = \{v_0\}$ in da je V_1 množica sosed točke v_0. Množice točk V_i, $i = 0, 1, \dots$ imenujmo *vreče* razdaljne particije.

Kaj lahko povemo o najkrajši poti med točkama v_0 in v_i? Najkrajših poti med dvema točkama v grafu je načeloma lahko več, vsekakor pa so vse najkrajše $v_0 - v_i$ poti iste dolžine, ki je enaka razdalji med točkama v_0 in v_i, torej natako i. Za vsako točko x grafa G naj P_x označuje neko najkrajšo $v_0 - x$ pot.

Katere povezave so lahko prisotne v grafu G? Razdelimo jih na tri skupine glede na lego njihovih krajišč v razdaljni particiji.

(P1) povezava $e = uv$ ima krajišči v isti vreči, $u \in V_i$ in $v \in V_i$,

(P2) povezava $e = uv$ ima krajišči v zaporednih vrečah, $u \in V_i$ in $v \in V_{i+1}$,

(P3) povezava $e = uv$ ima krajišči v nezaporednih vrečah, $u \in V_i$, $v \in V_j$ in $j \geq i + 2$.

Naj bo $e = uv$ povezava tipa (P3) in naj velja $u \in V_i$ in $v \in V_j$, kjer je $j \geq i + 2$. Naj bo P_u najkrajša $u_0 - u$ pot, ki je seveda dolžine i. Pot P_u lahko z uporabo povezave $e = uv$ podaljšamo do $u_0 - v$ poti dolžine $i + 1$. To je v nasprotju z dejstvom, da je razdalja med točkama u_0 in v enaka j, saj je $j > i + 1$. Torej v grafu G *sploh ni* povezav tipa (P3).

Denimo, da v grafu G obstaja povezava $e = uv$ tipa (P1). Naj bosta P_u in P_v najkrajši $u_0 - u$ oziroma $u_0 - v$ poti, ki sta seveda iste dolžine i. Sledenje poti P_v v smeri proti u_0, nato poti P_u v smeri proti v in na koncu uporaba povezave $e = uv$ določa obhod lihe dolžine $2i + 1$. Po Lemi 2 v grafu G obstaja cikel lihe dolžine in zato graf G ni dvodelen.

V nasprotnem primeru graf G *ne vsebuje* nobene povezave tipa (P1), kar pomeni, da točke iz posamezne vreče inducirajo prazen graf. Sedaj obarvamo vse točke iz vreč $V_0, V_2, V_4, \ldots$ s *sodo* barvo, točke iz vreč z lihimi indeksi $V_1, V_3, V_5, \ldots$ pa z *liho* barvo. Vsaka izmed povezav, ker je tipa (P2), ima krajišči obarvani z različnima barvama, zato je graf G dvodelen. □