2. kolokvij iz Diskretnih struktur - UNI
Ljubljana, 17. januar 2005

1. Obravnavamo naslednjo diofantsko enačbo:

$$12\,a + 21\,b + 33\,c = 6\,.$$

   (a) Pokaži, da je zgornja diofantska enačba rešljiva.

   (b) Poišči vse trojice $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ki enačbo rešijo.

   Rešitev:

   (a) $\gcd(12, 21, 33) = 3$ in $3|6$ zato je enačba rešljiva.

   (b) Najprej enačbo delimo z 3.

$$4\,a + 7\,b + 11\,c = 2\,.$$

   Izrazimo spremenljivko ob koeficientu z najmanjšo absolutno vrednostjo(a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{2 - 7b - 11c}{4} \\ &= \frac{(4-2) - (8-1)b - (12-1)c}{4} \\ &= 1 - 2b - 3c + \frac{-2 + b + c}{4}. \end{aligned}$$

   Označimo

$$k_1 = \frac{-2 + b + c}{4},$$

   kjer je $k_1 \in \mathbb{Z}$ in dobimo novo enačbo

$$b + c - 4k_1 = 2.$$

   Postopek ponovimo. Ker je najmanjši koeficient enak 1, je postopek pri koncu.

$$b = 2 - c + 4k_1.$$

   Ker smo uspeli b izraziti z dvema spremenljivkama, lahko postavimo ti dve spremeljivki za parametra.

$$\begin{aligned} c &= k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}, \\ b &= 2 - k_2 + 4k_1. \end{aligned}$$

   Ti dve enačbi vstavimo v zgornjo enačbo za a in dobimo

$$a = 1 - 2b - 3c + k_1 = -3 - 7k_1 - k_2.$$

Celotna rešitev je torej:

$$\begin{aligned}
a &= -3 - 7k_1 - k_2,\\
b &= 2 - k_2 + 4k_1,\\
c &= k_2,
\end{aligned}$$

kjer sta $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Rešitev lahko preverimo tako, da jo vstavimo v pokrajšano začetno enačbo:

$$\begin{aligned}
4a + 7b + 11c &= 4(-3 - 7k_1 - k_2) + 7(2 - k_2 + 4k_1) + 11k_2\\
&= 2.
\end{aligned}$$

2. Dana je permutacijska enačba:

$$\pi^{2005} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 7 & 1 & 4 & 3 & 2 & 12 & 6 & 20 & 15 & 18 & 17 & 5 & 16 & 8 & 9 & 13 & 11 & 10 & 14 & 19 \end{pmatrix}.$$

(a) Permutacijo na desni strani enačbe zapiši z disjunktnimi cikli.

(b) Poišči vse ciklične strukture permutacij π, ki enačbo rešijo.

(c) Poišči vsaj **dve** rešitvi enačbe.

Rešitev:

(a)

$$\pi^{2005} = (1\ 7\ 6\ 12\ 5\ 2)(3\ 4)(8\ 20\ 19\ 14)(9\ 15)(10\ 18)(11\ 17)(13\ 16).$$

(b) Analizirajmo:

i. 6-cikel lahko nastane samo iz 6-cikla.

ii. 4-cikel lahko nastane samo iz 4 cikla.

iii. Za 5 transpozicij bi lahko bilo veliko več moznosti (kombinacije 2,4,6,8,10 ciklov). Zaradi prejšnjih dveh točk 4 in 6 cikli ne smejo razpasti, zato niso primerni. Ker je $2005 \equiv 5 \pmod 8$ in 8-cikel na 5 ostane 8-cikel, odpadejo tudi 8 cikli. Ostaneta le dve možnosti:

- 5 transpozicij nastane pri razpadu 10-cikla,
- 5 transpozicij nastane iz 5 transpozicij.

Možni ciklični strukturi, ki gotovo določata vsaj po eno rešitev, sta:

- $(_6)(_4)(_{10})$,
- $(_6)(_4)(_2)(_2)(_2)(_2)(_2)$,

(c) Poiščimo po eno rešitev vsakega izmed tipov

i. Prvi tip:

$$\begin{aligned}\pi &= (a\ b\ c\ d\ e\ f)(g\ h\ i\ j)(k\ l\ m\ n\ o\ p\ r\ s\ t\ u)\\ \pi^{2005} &= (a\ b\ c\ d\ e\ f)^1(g\ h\ i\ j)^1(k\ l\ m\ n\ o\ p\ r\ s\ t\ u)^5\\ &= (a\ b\ c\ d\ e\ f)(g\ h\ i\ j)(k\ p)(l\ r)(m\ s)(n\ t)(o\ u)\\ &= (1\ 7\ 6\ 12\ 5\ 2)(8\ 20\ 19\ 14)(3\ 4)(9\ 15)(10\ 18)(11\ 17)(13\ 16).\end{aligned}$$

Eno od rešitev dobimo, če enostavno izenačimo istoležne komponente.

$$\pi_1 = (1\ 7\ 6\ 12\ 5\ 2)(8\ 20\ 19\ 14)(3\ 9\ 10\ 11\ 13\ 4\ 15\ 18\ 17\ 16).$$

Seveda z obračanjem zapisa transpozicij dobimo še mnogo drugih rešitev.

ii. Drugi tip:

$$\begin{aligned}\pi &= (a\ b\ c\ d\ e\ f)(g\ h\ i\ j)(k\ l)(m\ n)(o\ p)(r\ s)(t\ u)\\ \pi^{2005} &= \pi = (1\ 7\ 6\ 12\ 5\ 2)(8\ 20\ 19\ 14)(3\ 4)(9\ 15)(10\ 18)(11\ 17)(13\ 16).\end{aligned}$$

3. Izberimo permutacijo $\gamma = (1\,2\,3\,4\,5) \in S_5$. Na množici vseh permutacij iz S_5 je opisana relacija R:

$$\pi R \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} : \pi = \gamma^{-n} * \psi * \gamma^n.$$

(a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

(b) Določi red permutacije γ.

(c) Poišči ekvivalenčni razred permutacije $\alpha = (13)(42)$.

(d) Pokaži, da noben ekvivalenčni razred nima več kot 5 elementov.

(e) Poišči enega od ekvivalenčnih razredov z največ elementi in enega z najmanj elementi.

Rešitev:

(a) **REF:** Naj bo α poljuben. Velja, ker $\alpha = \gamma^{-5} * \alpha * \gamma^5$.

SIM: Naj bosta α, β poljubna in v relaciji. Torej: $\alpha = \gamma^{-n} * \beta * \gamma^n$. Potem je $\beta = \gamma^{-(-n)} * \alpha * \gamma^{-n}$. Dobimo refleksivnost.

TRAN: Naj bodo α, β, δ taki, da $\alpha R \beta$ in $\beta R \delta$. To pomeni

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma^{-n} * \beta * \gamma^n,\\ \beta &= \gamma^{-m} * \delta * \gamma^m,\end{aligned}$$

za neka $m, n \in \mathbb{Z}$. Potem velja

$$\alpha = \gamma^{-n} * \gamma^{-m} * \delta * \gamma^m * \gamma^n = \gamma^{-(n+m)} * \delta * \gamma^{m+n}.$$

in tranzitivnost sledi.

(b) $\gamma^5 = \mathrm{id}$. S potenciranjem ugotovimo, da nobena potenca manjša od 5 ne da identiteto. Red je torej natanko 5.

(c) Po točki (d) je dovolj če izračunamo $\gamma^{-i} * \alpha * \gamma^i$, za $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. oz. $(\gamma^i(1)\ \gamma^i(3))(\gamma^i(4)\ \gamma^i(2))$ Dobimo:

$$\{(1\ 3)(4\ 2), (2\ 4)(5\ 3), (3\ 5)(1\ 4), (4\ 1)(2\ 5), (5\ 2)(3\ 1)\}$$

(d) Cel ekvivalenčni razred za nek $\alpha \in S_5$ je:

$$\left\{\gamma^{-n} * \alpha * \gamma^n | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Toda, če upoštevamo točko (b):

$$\gamma^{-n} * \alpha * \gamma^n = \gamma^{(-n \bmod 5)} * \alpha * \gamma^{(n \bmod 5)}$$

iz česar sledi, da ima ekvivalenčni razred kvečjemu 5 elementov.

(e) Enega izmed največjih ekvivalenčnih razredov smo poiskali v točki (c). Najmanjši ekvivalenčni razred ima le en element in to je $\{\mathrm{id}\}$

4. Dana je enačba:

$$2^{3^{4^a}} \equiv a \pmod{11}.$$

(a) Izračunaj $\varphi(11)$.

(b) Kaj se dogaja s potencami števila 2 v $\mathbb{Z}_{11}$?

(c) Ali je $a = 4$ ena od rešitev enačbe?

(d) Poišči vse tiste $a \in \mathbb{Z}_{11}$, ki zadoščajo enačbi.

Rešitev:

(a) $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$, ker je 11 praštevilo.

(b) Ker je 2 tuje z 11, je perioda 2 pri potenciranju $\varphi(11) = 10$. Torej $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Sicer pa so vrednosti potenc od 1 do 10: 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1. Potem pa se spet ponavljajo.

(c) Izračunati moramo vrednost

$$2^{3^{4^4}} \mod 11.$$

in ugotoviti ali je ta enaka 4. Ker bomo splošno rešitev potrebovali pri naslednji točki, se lotimo kar izračuna naslednjega izraza:

$$2^{3^{4^a}} \mod 11.$$

Ker vemo, da je $2^{10} = 1 \pmod{2}$, moramo najprej izračunati:

$$3^{4^a} \mod 10$$

Število 3 je tuje z 10 in zato je $3^{\varphi(10)} \equiv 1 \pmod{10}$ in $\varphi(10) = \varphi(5 \cdot 2) = \varphi(5)\varphi(2) = 4 \cdot 1 = 4$. Izračunati moramo

$$4^a \mod 4,$$

kar pa vemo, da je 0, če $a \neq 0$ in 1, če $a = 0$. Obe možnosti vstavimo nazaj v prejšnje enačbe.

$$3^{4^a} \mod 10 = 3^0 \mod 10 = 1, \; a \neq 0,$$
$$2^{3^{4^a}} \mod 11 = 2^1 = 2.$$

in

$$3^{4^0} \mod 10 = 3^1 \mod 10 = 3,$$
$$2^{3^{4^0}} \mod 11 = 2^3 = 8.$$

Izbira $a = 4$ torej ni rešitev.

(d) Po točki (c) je edina rešitev $a = 2$.

2. kolokvij iz Diskretnih struktur — UNI
Ljubljana, 7. januar 2006

1. Na množici naravnih števil od 1 do 10000 so dane relacije R_1, R_2 in R_4 z naslednjimi predpisi

$$\begin{aligned} m\,R_1\,n &\Leftrightarrow m \text{ in } n \text{ imata isti ostanek pri deljenju s } 24,\\ m\,R_2\,n &\Leftrightarrow m \text{ in } n \text{ imata v decimalnem zapisu isto število dvojk},\\ m\,R_4\,n &\Leftrightarrow m \text{ in } n \text{ imata v decimalnem zapisu isto število štiric.} \end{aligned}$$

   (a) Pokaži, da je $R = R_1 \cap R_2 \cap R_4$ ekvivalenčna relacija.

   (b) Pokaži, da noben ekvivalenčni razred relacije R ne vsebuje več kot 653 elementov.

   (c) Poišči ekvivalenčni razred z najmanjšim številom elementov.

   (d) [Dodatna naloga za +10 točk] Ali ima lahko ekvivalenčni razred natančno dva elementa? Zakaj?

2. Naj bo A množica naravnih števil med 1 in 6000, ki so deljiva s 3 ali 7 ter niso deljiva s 105.

   (a) Določi moč množice A.

   (b) Koliko števil v množici A dá pri deljenju s 3 ostanek 2?

3. Dana je diofantska enačba

$$17\,x + 6\,y + 3\,z = 73\,.$$

   (a) Poišči največji skupni delitelj koeficientov enačbe.

   (b) Pokaži, da je diofantska enačba rešljiva.

   (c) Poišči njeno splošno rešitev.

   (d) Poišči vse rešitve enačbe v naravnih številih. Koliko jih je?

4. V kolobarju $(\mathbb{Z}_{28}, +, \cdot)$ odgovori na naslednji vprašanji.

   (a) Kateri so delitelji niča v tem kolobarju?

   (b) Kaj je v tem kolobarju inverz od 13?

   V $(\mathbb{Z}_{28}, +, \cdot)$ poišči tudi vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} 2\,x + 13\,y &= 5\\ 4\,x + 7\,y &= 3\,. \end{aligned}$$

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh listov A4 z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!

Rezultati bodo dostopni na `matematika.fri.uni-lj.si` *. Obenem bo objavljen tudi termin, namenjen ogledu izdelkov in morebitnim pritožbam na rezultate.*

2. kolokvij iz Diskretnih struktur — UNI
Ljubljana, 19. januar 2007

1. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ je dana relacija
$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 1)\}.$$
   (a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1, 3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10}.
   (b) Pokaži, da je $S^{2007} = U_A$. (U_A je univerzalna relacija na množici A, tj. $U_A = A \times A$).
   (c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a, b)\}$, kjer je (a, b) poljuben urejen par, ki ni v R. Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2007} = U_A$.

2. Dana je linearna diofantska enačba
$$4x + 5y + 7z = 23.$$
   (a) Poišči njeno splošno rešitev.
   (b) Poišči vse rešitve enačbe v množici $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

3. Dani sta permutaciji
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 11 & 9 & 8 & 3 & 6 & 5 & 4 & 10 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$
   in
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 10 & 3 & 4 & 11 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$
   (a) Določi ciklično strukturo permutacije $\alpha^{-1} * \beta$.
   (b) Poišči vse ciklične strukture permutacije π, ki rešijo enačbo $\alpha * \pi^4 = \beta$.
   (c) Poišči vsaj dve rešitvi zgornje enačbe. (Za dodatnih 5 točk: Poišči vse rešitve).

4. V prvem letniku imamo 332 študentov. Prvo domačo nalogo je rešilo 216 študentov, drugo 148 študentov, tretjo pa 129 študentov. Prvi dve nalogi je rešilo 108 študentov, prvo in tretjo nalogo 83 študentov, drugo in tretjo pa je rešilo 25 študentov. Koliko študentov ne sme opravljati kolokvija iz diskretnih struktur (ker niso rešili nobene domače naloge)?

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!

Rezultati bodo dostopni na `matematika.fri.uni-lj.si`. *Obenem bo objavljen tudi termin namenjen ogledu izdelkov in morebitnim pritožbam na rezultate.*

2. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 8. januar 2008

1. Na množici $A = \{1, \dots, 12\}$ števil od 1 do 12 je definirana relacija R:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \in \{2, 4\}.$$

   (a) čim lepše nariši graf relacije $R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

   (b) Pokaži, da je relacija R^+ ekvivalenčna relacija.

   (c) Kaj so ekvivalenčni razredi relacije R^+?

2. Reši diofantsko enačbo

$$27x + 17y = 105.$$

   Poišči vse rešitve, pri katerih sta x in y nenegativni celi števili. Koliko jih je?

3. V kolobarju $\mathbb{Z}_{20}$ poišči vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 12 \\ 2x + 7y &= 18. \end{aligned}$$

4. V anketi 27 študentov vprašamo, v katerih programskih jezikih znajo programirati. V jeziku C zna programirati 13 študentov, v Javi 13 in v jeziku C++ zna programirati 16 študentov. V jezikih C in Java zna programirati 7 študentov, v jezikih C++ in Java 8 študentov in v jezikih C in C++ 9 študentov. Takih, ki ne znajo programirati v nobenem od teh jezikov, je dvakrat toliko kot študentov, ki znajo programirati v vseh treh jezikih.

   (a) Koliko študentov zna programirati v vseh treh jezikih?

   (b) Koliko študentov zna programirati v Javi in v vsaj enem od C in C++?

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

2. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 27. januar 2009

1. Člani sveta borze so glasovali za najslabšo delnico leta 2008. V ožji krog so prišle delnice podjetij A, B in C. Vsak član sveta borze je lahko glasoval za eno, dve, tri ali za nobeno delnico. Tako je za delnico A oddanih 10 glasov in za delnico B 6 glasov. Izključno za delnico C je glasovala $\frac{1}{11}$ vseh članov, kar je 3-krat manj kot število članov sveta, ki so se vzdržali glasovanja. Le dva člana sta oddala glasove vsaj za delnici A in B, en član vsaj za delnici B in C ter štirje člani vsaj za delnici A in C. Le en član sveta je upravičeno menil, da so vse tri delnice zanič.
   (a) Koliko je vseh članov sveta borze?
   (b) Ali se lahko odločimo, katera delnica je absolutno najslabša?

2. Kakšen je ostanek števila $5^{9^{13^{17}}}$ pri deljenju z 11?

3. Omarr Ra'fat Rasshid Khan (أُومَرّ ▮َأفَت ▮َسّهِد ڭهَن) premore 100 zlatnikov. Trgovec mu za 1 zlatnik ponuja 3 koze, za 3 zlatnike ovco, za 5 zlatnikov kamelo in za 103 zlatnike svojo hči za ženo. Pri tem se je Omarr odločil, da tokrat domov odpelje 100 glav živine in zapravi ves denar. Največ koliko kamel lahko Omarr pripelje domov?

4. Dani sta permutaciji α in β:

$$\begin{aligned}\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 2 & 1 & 3 & 9 & 10 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   (a) Določite β^{2009}.
   (b) Določite vse možne ciklične strukture permutacije π, ki reši enačbo

$$\alpha * \pi^{2002} * \alpha^{-1} = \beta\,.$$

   (c) Poiščite vsaj eno sodo in vsaj eno liho permutacijo π, ki rešita zgornjo enačbo.

Pri tej nalogi je smer množenja permutacij nepomembna – lahko množimo od leve proti desni (produkt permutacij) ali pa od desne proti levi (kompozitum preslikav). Po drugi strani pa je smer branja imena Omarrja iz tretje naloge pomembna – v arabščini se bere od desne proti levi, latinska transkripcija pa od leve proti desni.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`. *Rezultati bodo objavljeni v četrtek, 29. januarja. Ogled kolokvija bo v petek, 30. januarja, pred predrokom iz teorije.*

2. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 27. januar 2009

1. Člani sveta borze so glasovali za najslabšo delnico leta 2008. V ožji krog so prišle delnice podjetij A, B in C. Vsak član sveta borze je lahko glasoval za eno, dve, tri ali za nobeno delnico. Tako je za delnico A oddanih 10 glasov in za delnico B 6 glasov. Izključno za delnico C je glasovala $\frac{1}{11}$ vseh članov, kar je 3-krat manj kot število članov sveta, ki so se vzdržali glasovanja. Le dva člana sta oddala glasove vsaj za delnici A in B, en član vsaj za delnici B in C ter štirje člani vsaj za delnici A in C. Le en član sveta je upravičeno menil, da so vse tri delnice zanič.

   (a) Koliko je vseh članov sveta borze?

   (b) Ali se lahko odločimo, katera delnica je absolutno najslabša?

2. Kakšen je ostanek števila $5^{9^{13^{17}}}$ pri deljenju z 11?

3. Omarr Ra'fat Rasshid Khan (أُومَرّ َأفَت َسّهِد كْهَن) premore 100 zlatnikov. Trgovec mu za 1 zlatnik ponuja 3 koze, za 3 zlatnike ovco, za 5 zlatnikov kamelo in za 103 zlatnike svojo hči za ženo. Pri tem se je Omarr odločil, da tokrat domov odpelje 100 glav živine in zapravi ves denar. Največ koliko kamel lahko Omarr pripelje domov?

4. Dani sta permutaciji α in β:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 2 & 1 & 3 & 9 & 10 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Določite β^{2009}.

   (b) Določite vse možne ciklične strukture permutacije π, ki reši enačbo
$$\alpha * \pi^{2002} * \alpha^{-1} = \beta\,.$$

   (c) Poiščite vsaj eno sodo in vsaj eno liho permutacijo π, ki rešita zgornjo enačbo.

Pri tej nalogi je smer množenja permutacij nepomembna – lahko množimo od leve proti desni (produkt permutacij) ali pa od desne proti levi (kompozitum preslikav). Po drugi strani pa je smer branja imena Omarrja iz tretje naloge pomembna – v arabščini se bere od desne proti levi, latinska transkripcija pa od leve proti desni.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`. Rezultati bodo objavljeni v četrtek, 29. januarja. Ogled kolokvija bo v petek, 30. januarja, pred predrokom iz teorije.