

# Popravni kolokvij iz Diskretnih struktur

## Ljubljana, 29. januar 2010

1. Ugotovi, ali je naslednji sklep pravilen ali napačen:

$$\neg q \vee s \vee t, t \Rightarrow p, (q \Rightarrow s) \Rightarrow p \vee r \vee q, (u \Rightarrow p \vee r) \Leftrightarrow q \models u \Rightarrow p \vee r$$

Zapiši dokaz ali poišči protiprimer.

2. Logični veznik  $A$  definiramo z opisom:

$$A(p, q, r) \sim \neg(p \Rightarrow q \wedge r)$$

(a) Kateri od naborov  $\{A\}$ ,  $\{A, \wedge\}$ ,  $\{A, \Rightarrow\}$  oz  $\{A, \neg\}$  so polni?

(b) Naj bosta  $p$  in  $q$  poljubni izjavi. Zaporedje izrazov  $(B_n)_n$  definiramo z

- $B_1 \equiv p, B_2 \equiv \neg p,$
- $B_n \equiv A(B_{n-2}, B_{n-1}, q)$  za vse  $n > 2$ .

Določi  $B_{2010}$ .

3. V množici ostankov pri deljenju z 18 reši sistem enačb

$$14x + 6y \equiv 12 \pmod{18}$$

$$11x + 3y \equiv 9 \pmod{18}$$

4. Definirajmo graf  $G_n$  na točkah  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ . Pri tem sta različni točki  $a$  in  $b$  sosedi natanko tedaj, ko je rešljiva Diofantska enačba  $ax + by = n$ .

(a) Nariši grafa  $G_3$  in  $G_4$ .

(b) Pokaži, da  $G_n$  vsebuje točko stopnje  $2n - 1$ .

(c) Pokaži, da je  $G_n$  Hamiltonov graf za  $n \geq 2$ .

**Odgovore dobro utemelji!**

*Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).*

# 1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur

## Ljubljana, 31. januar 2011

1. Oglejmo si naslednji sklep

$$\neg u \vee \neg p \vee \neg r, \quad q \Leftrightarrow s, \quad t \Rightarrow q \wedge s, \quad \neg s \vee r, \quad (p \wedge u) \Leftrightarrow t \quad \models \neg p \vee \neg u.$$

(a) Pokažite, da je sklep pravilen.

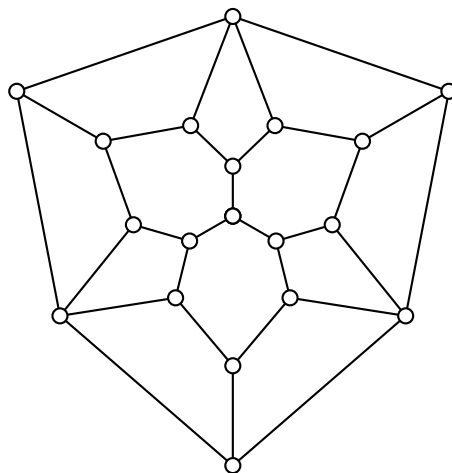
(b) Pokažite, da lahko odstranite eno (morda pazljivo izbrano) izmed predpostavk, pa bo sklep še vedno pravilen.

2. Naj bodo  $A, B, C$  dane množice in naj bo  $X$  neznana množica. Ugotovite, kdaj je spodnji sistem enačb rešljiv in poiščite vse njegove rešitve

$$\begin{aligned} B \cap C &= C \cap X^C \\ X \cup B &= A^C \cap B. \end{aligned}$$

3. Pokažite, da je ostanek števila  $5^{9^{13^{17^n}}}$  pri deljenju s 23 neodvisen od naravnega števila  $n \geq 1$  in izračunajte ta ostanek.

4. Naj bo  $G$  graf na sliki.



(a) Določite  $\Delta(G)$ ,  $\delta(G)$ , premer in dolžino najkrajšega cikla v grafu  $G$ .

(b) Določite kromatično število grafa  $G$ .

(c) Ali je graf  $G$  Eulerjev? Ali je Hamiltonov?

**Odgovore dobro utemelji!**

*Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).*

## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur Ljubljana, 14. februar 2011

1. Primož, Robert, Samo in Tilen se pogovarjajo, kdo ima že opravljen izpit iz Diskretnih struktur. Ugotovijo naslednje:

- Primož ima opravljen izpit natanko tedaj, ko ga Robert nima.
- Če ima Robert opravljen izpit, potem ga ima tudi Tilen.
- Če ima opravljen izpit Primož ali Robert, potem ga ima tudi Samo.
- Bodisi ima Robert opravljen izpit, bodisi ga Samo nima.

Kdo od omenjenih štirih študentov še nima opravljenega izpita iz Diskretnih struktur?

2. Naj bo  $\mathcal{M}$  množica ostankov pri deljenju z 39.

- Poiščite  $\varphi(39)$  ter napišite vse obrnljive ostanke v množici  $\mathcal{M}$ .
- Poiščite vse  $x \in \mathcal{M}$ , ki rešijo enačbo  $38x \equiv 3 \pmod{39}$ .
- Poiščite število  $n$ , različno od 39, za katero velja, da je  $k$  produkt dveh različnih praštevil ter  $\varphi(k) = \varphi(39)$ .

3. Naj bo na množici števil  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dana relacija

$$R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 6), (6, 1)\}.$$

- Čim lepše narišite graf relacije  $R$  (po možnosti brez križišč in z ravnimi puščicami).
- Določite vse  $n \in \mathbb{N}$ , za katere velja  $1 R^n 4$ .
- Opišite relacijo  $R^+$ .

4. Naj bosta

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 10 & 8 & 7 & 11 & 1 & 2 & 5 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 11 & 7 & 2 & 10 & 9 & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Poiščite red permutacij  $\alpha$  in  $\beta$  in dokažite, da je  $\alpha^{12} = \alpha$  in  $\beta^{13} = \beta$ .
- Naj bo

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 8 & 11 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Preverite, da je  $(\alpha\beta)^2 = \gamma$ , torej, da je  $\alpha\beta$  rešitev enačbe  $\pi^2 = \gamma$ , kjer je  $\pi$  neznana permutacija. Poiščite tudi vse možne ciklične strukture rešitev  $\pi^2 = \gamma$ .

- Poiščite eno rešitev enačbe  $\pi^2 = \gamma$ , ki ima ciklično strukturo  $3 + 3 + 3 + 2$ .

**Odgovore dobro utemelji!**

*Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).*

### 3. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur Ljubljana, 30. avgust 2011

1. Logični veznik  $A$  definiramo s predpisom:

$$A(p, q, r) \sim p \Rightarrow \neg q \vee \neg r.$$

- (a) Katere izmed logičnih izrazov  $\neg p$ ,  $p \vee q$ ,  $p \wedge q$  lahko izraziš zgolj z veznikom  $A$ ? Izrazi tiste med njimi, ki jih je mogoče.
- (b) Kateri izmed naborov  $\{A\}$ ,  $\{A, 0\}$ ,  $\{A, \vee\}$  so polni? Utemelji.
- (c) Zaporedje izrazov  $(B_n)_n$  definiramo z
- $B_0 \sim p$ ,  $B_1 \sim 1$ ,
  - $B_n \sim A(B_{n-2}, B_{n-1}, p)$  za vse  $n \geq 2$ .

Določi  $B_{2011}$ .

2. V množici ostankov pri deljenju s 24 poišči vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned}4x + 19y &\equiv 9 \pmod{24} \\6x + 16y &\equiv 14 \pmod{24}.\end{aligned}$$

3. Na množici kompleksnih števil vpeljemo relacijo

$$z R w \iff i(z - w) \in \mathbb{R}.$$

- (a) Pokaži, da je relacija  $R$  ekvivalenčna
- (b) Kaj so njeni ekvivalenčni razredi?

4. Naj bo  $G_n$ ,  $n \geq 3$ , graf ki ga dobimo tako, da ciklu na  $n$  točkah dodamo povezave med točkami, ki so na razdalji 2.

- (a) Nariši grafe  $G_4$ ,  $G_8$  in  $G_9$ .
- (b) Kateri od grafov  $G_n$ ,  $n \geq 3$ , so Eulerjevi?
- (c) Določi kromatična števila grafov  $G_4$ ,  $G_8$  in  $G_9$ .

**Odgovore dobro utemelji!**

*Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).*

# 1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur

UNI  
(Ljubljana, 28. januar 2013)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [uci1nica.fri.uni-lj.si](http://uci1nica.fri.uni-lj.si).

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Dokaži pravilnost spodnjega sklepa z uporabo pravil sklepanja.

$$r \vee s \Rightarrow q \wedge r, r \vee s \vee t, \neg t \wedge r \Rightarrow p \models \neg t \Rightarrow p \wedge q$$

2. V množici celih števil  $\mathbb{Z}$  je dana relacija

$$xRy \iff 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

(a) Dokaži, da je relacija  $R$  ekvivalenčna.

(b) Kaj je ekvivalenčni razred števila 1;  $[1]_R$ ?

(c) Določi moč faktorske množice  $\mathbb{Z}/R$ .

3. Naj bo  $\alpha \in S_8$  permutacija  $(13)(25)(47)(68)$ . Ali sta v  $S_8$  rešljivi enačbi

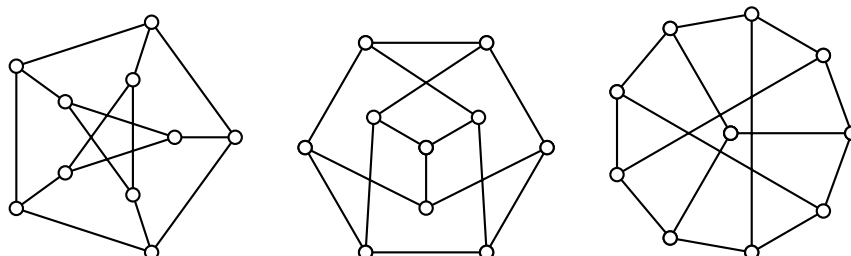
$$\pi^{13} = \alpha \quad \text{in} \quad \pi^{16} = \alpha?$$

Rešljivost lahko utemeljiš tako, da poiščeš eno rešitev enačbe. Če enačba nima rešitev, navedi natančne razloge zakaj ne.

4. (a) Za vsakega od grafov na spodnji sliki določi največjo in najmanjšo stopnjo točke ter dolžino najkrajšega cikla v grafu.

(b) Poišči še eno lastnost, ki je skupna vsem trem grafom.

(c) Natančno utemelji, da so vsi trije grafi izomorfni.



**Vse odgovore dobro utemelji!**

## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur

UNI  
(Ljubljana, 11. februar 2013)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.

**Vse odgovore dobro utemelji!**

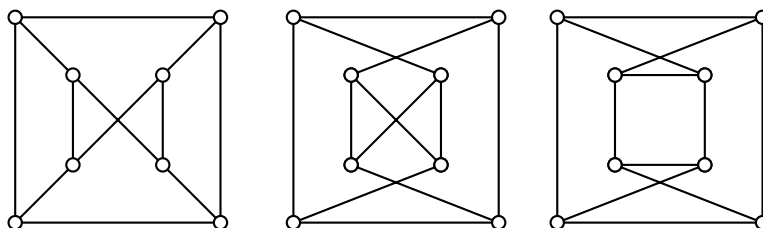
1. Dan je tromestni izjavni veznik  $A(p, q, r) = p \vee r \Rightarrow p \wedge q \wedge r$ .

- Izrazi implikacijo  $p \Rightarrow q$  in ekvivalenco  $p \Leftrightarrow q$  samo z uporabo veznika  $A$ .
- Izrazi  $A$  samo z vezniki  $\neg, \vee, \wedge$ .
- Kateri izmed naborov  $\{A\}, \{1, A\}, \{A, \neg\}$  so polni in kateri ne?

2. Reši sistem enačb:

$$\begin{aligned}A \cap X &= A \cap C, \\X \cup C &= C \setminus B.\end{aligned}$$

- Poišči štiri lastnosti, ki so skupne vsem trem grafom.
- Kateri grafi so dvodelni in kateri ne?
- Za vsak par grafov ugotovi, ali sta izomorfna ali ne.



4. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(2\ 4\ 6\ 8).$$

Poišči vsaj tri različne permutacije  $\pi \in S_9$ , ki rešijo enačbo

$$\alpha\pi^{1102} = \beta.$$

**Vse odgovore dobro utemelji!**

# 3. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur (Ljubljana, 2. september 2013)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na učilnica.fri.uni-lj.si.

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Ali je kateri izmed spodnjih sklepov pravilen?

$$\begin{aligned} r \Rightarrow q \vee t, \quad t \Rightarrow \neg p, \quad \neg q \vee \neg p, \quad p \Rightarrow r &\models p \\ r \Rightarrow q \vee t, \quad t \Rightarrow \neg p, \quad \neg q \vee \neg p, \quad p \Rightarrow r &\models \neg p \end{aligned}$$

Poišči protiprimer ali pa dokaži s pomočjo pravil sklepanja.

2. Naj bodo  $A, B, C$  dane množice. Kdaj je rešljiv spodnji sistem enačb?

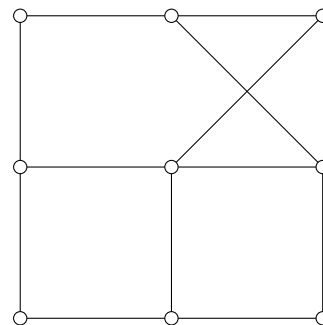
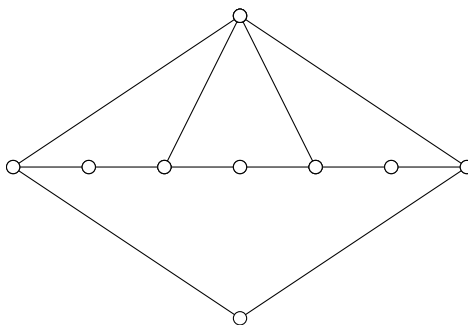
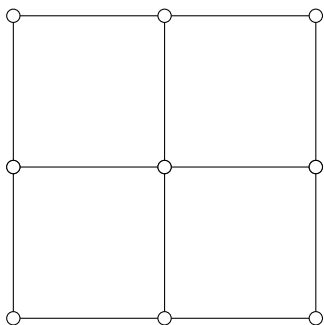
$$\begin{aligned} A \cup C &= A \cap X \\ B \cap C \cup X \setminus A &= A \setminus X \end{aligned}$$

V primeru, ko je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

3. (a) Poišči inverz ostanka 11 v množici ostankov pri deljenju z 48.  
(b) V množici ostankov pri deljenju z 48 poišči vse rešitve sistema

$$\begin{aligned} 8x + 15y &\equiv 3 \pmod{48} \\ 11x + 6y &\equiv 3 \pmod{48} \end{aligned}$$

4. (a) Določi zaporedje stopenj grafov na sliki.  
(b) Določi kromatično število grafov.  
(c) Kateri izmed grafov so Hamiltonovi?  
(d) Ali sta katera izmed grafov izomorfna?



**Vse odgovore dobro utemelji!**

# 1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 20. januar 2014)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Tromestni izjavni veznik  $A$  je dan s predpisom

$$A(p, q, r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge r.$$

- (a) Poišči vse izjavne izraze  $X$  (v odvisnosti od  $p$  in  $q$ ), za katere je  $A(p, q, X)$  protislovje.
- (b) Pokaži implikacijo: Če lahko le z uporabo  $A$  izraziš kateregakoli od zgornjih  $X$ , potem lahko le z uporabo  $A$  izraziš protislovje.
- (c) Pokaži, da se z  $A$  ne da izraziti protislovja.

2. Na množici naravnih števil  $\mathbb{N}$  je dana relacija:

$$aRb \iff a \text{ deli } b^2.$$

- (a) Dokaži, da je relacija  $R$  refleksivna.
- (b) Ali je  $R$  tranzitivna? Dokaži ali pa poišči protiprimer!
- (c) Dokaži implikacijo: Če obstaja  $k \in \mathbb{N}$ , da  $a$  deli  $b^{2^k}$ , potem velja  $aR^*b$ .

3. Poišči vsa cela števila  $x$ , za katera velja

$$4x \equiv 5 \pmod{9} \quad \text{in} \quad 5x \equiv 4 \pmod{8}.$$

4. Za permutaciji  $\pi$  in  $\alpha \in S_8$  velja

$$\alpha^2 = \text{id} \quad \text{in} \quad \pi * \alpha * \pi = \alpha.$$

- (a) Prepričaj se, da je red permutacij  $\pi * \alpha$  in  $\alpha * \pi$  največ 2.
- (b) Kaj so dopustne ciklične strukture za  $\alpha$ ,  $\pi * \alpha$  in  $\alpha * \pi$ ?
- (c) Naj bo  $\alpha = (18)(27)(36)(45)$ . Poišči tri rešitve  $\pi$  enačbe  $\pi * \alpha * \pi = \alpha$ , ki so po vrsti redov 1, 2 in več kot 3.

**Vse odgovore dobro utemelji!**



## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 6. februar 2014)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Katera izmed spodnjih formul je splošno veljavna?

$$\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \Rightarrow P(x))$$

Za vsako pokaži, da je splošno veljavna ali pa najdi interpretacijo, v kateri ima formula logično vrednost 0.

2. (a) Pokaži, da velja vsebovanost

$$(A \cap B) \times (C \cup D) \subseteq ((A \times C) \cup (B \times D)) \cap ((A \times D) \cup (B \times C)).$$

(b) Pokaži, da ne velja enakost

$$(A \cap B) \times (C \cup D) = ((A \times C) \cup (B \times D)) \cap ((A \times D) \cup (B \times C)).$$

(c) Naj bo  $A + B = \emptyset$ . Pokaži, da v tem primeru zgornja enakost velja.

3. Koliko je rešitev sistema

$$11x + 9y + 8z = 1000$$

$$6x + 8y + 12z = 1000$$

pri katerih so  $x, y, z \in \mathbb{N}$ .

**Namig:** iz enačb najprej izrazi eno spremenljivko.

4. V množici permutacij  $S_{10}$  opazujemo permutacije, ki rešijo enačbo  $\pi^{10} = \pi$ .

(a) Cikli kakšnih dolžin lahko nastopajo v razcepu permutacije  $\pi$  na produkt disjunktnih ciklov.

(b) Pokaži, da imajo vse permutacije  $\pi$ , ki rešijo enačbo, vsaj eno fiksno točko.

(c) Poišči eno rešitev, ki ima najmanjše možno število fiksnih točk.

Vse odgovore dobro utemelji!

## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (izredni rok, Ljubljana, 20. februar 2014)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Definiran je logični veznik  $A(p, q, r) \equiv p \downarrow (q \downarrow r)$ .

- (a) Kateri izmed naborov veznikov  $\{A\}$ ,  $\{A, 0\}$ ,  $\{A, 1\}$ ,  $\{A, \vee\}$ ,  $\{A, \Leftrightarrow\}$  so polni?
- (b) Zaporedje  $B_n$  je definirano rekurzivno s predpisom

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_1 &= 0 \\ B_n &= A(B_{n-2}, p, B_{n-1}) \end{aligned}$$

Izračunaj  $B_{2014}$ .

2. Na množici  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  definiramo relacijo  $R$  s predpisom

$$xRy \text{ natanko tedaj, ko } xy \equiv 1 \pmod{3}$$

- (a) Nariši graf relacije  $R$ .
- (b) Ali je relacija  $R$  simetrična, refleksivna oz. tranzitivna?
- (c) Določi relaciji  $R^+$  in  $R^*$ .

3. V množici ostankov pri deljenju z 20 poišči vse rešitve sistema

$$\begin{aligned} 5x + 2y &\equiv 16 \pmod{20} \\ 7x + 10y &\equiv 4 \pmod{20} \end{aligned}$$

4. Dani sta permutaciji

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 11 & 9 & 13 & 10 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

in

$$\alpha = (1, 8, 5, 3, 7, 6, 2)(10, 13)(12, 15, 14)$$

- (a) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije  $\beta$ .
- (b) Poišči vse možne ciklične strukture za permutacijo  $\pi$ , ki reši enačbo  $\pi^{14} * \beta = \alpha$
- (c) Poišči tisto rešitev enačbe, ki ima minimalno število disjunktnih ciklov.

Vse odgovore dobro utemelji!

# 1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 30. januar 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Naj bo  $A$  tromestni izjavni veznik definiran z  $A(p, q, r) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg r)$ .

- (a) Kateri izmed naborov  $\{A\}$ ,  $\{A, \wedge\}$ ,  $\{A, 1\}$ ,  $\{A, 0\}$  so polni?
- (b) Zaporedje  $A_n$  je definirano rekurzivno z

$$\begin{aligned}A_1 &= p \\A_2 &= \neg p \\A_n &= A(A_{n-1}, 0, A_{n-2})\end{aligned}$$

Izračunaj  $A_{2015}$ .

2. Na množici  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  definiramo relacijo  $R$  s predpisom

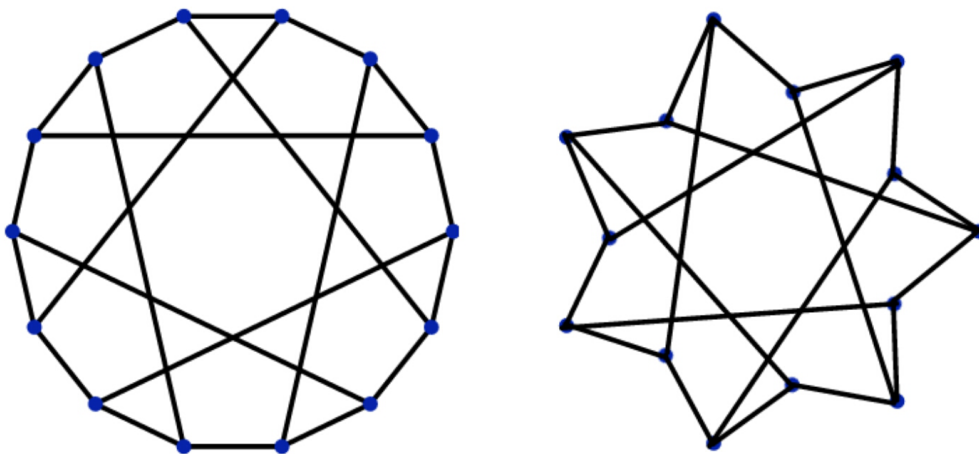
$$aRb \equiv (a \text{ deli } b) \text{ ali } (b \text{ deli } a).$$

- (a) Nariši grafa relacij  $R$  in  $R^2$ .
- (b) Za vsako od relacij ugotovi, ali je refleksivna. Je katera simetrična? Transitivna?
- (c) Če je katera od relacij ekvivalenčna, potem poišči vse ekvivalenčne razrede.

3. Dana je diofantska enačbe  $68x + 119y = 2057$

- (a) Poišči vse rešitve diofantske enačbe.
- (b) Koliko je rešitev v naravnih številih ( $x, y \in \mathbb{N}$ )? Katere?

4. (a) Za vsakega od grafov na sliki ugotovi, ali je Eulerjev.  
(b) Za vsakega ugotovi, ali je Hamiltonov.  
(c) Ali sta grafa izomorfna?



Vse odgovore dobro utemelji!

## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 17. februar 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti  $A_4$  z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Ali je kateri izmed sklepov pravilen

$$p \wedge (r \vee s), \quad (\neg t \vee r) \Rightarrow \neg p, \quad (s \wedge q) \Rightarrow (\neg t \vee u) \quad \models \quad q \Rightarrow u$$

$$p \wedge (r \vee s), \quad (\neg t \vee r) \Rightarrow \neg p, \quad (s \wedge q) \Rightarrow (\neg t \vee u) \quad \models \quad u \Rightarrow q$$

Pravilne sklepe dokaži s pravili sklepanja, za napačne najdi protiprimer!

2. Katere od izjavnih formul  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$  so enakovredne in katere ne? Utemelji. Če je potrebno, poišči ustrezne interpretacije.

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

$$B = \neg \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$$

$$C = \exists y P(y) \wedge \neg \forall x \neg Q(x)$$

$$D = \neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$$

3. Preslikava  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  je definirana s predpisom

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

(a) Izračunaj  $f(1, 1)$ ,  $f(1, 2)$ ,  $f(2, 1)$ .

(b) Poišči vse  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , za katere je  $f(x, y) = (3, 6)$ . Poišči vse  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , za katere je  $f(x, y) = (3, 7)$ .

(c) Ali je preslikava  $f$  injektivna. Ali je surjektivna? Je bijekcija?

4. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = (1\ 3)(5\ 8).$$

(a) Določi red in ciklično strukturo permutacije  $\alpha * \beta$ .

(b) Določi vse ciklične strukture za permutacijo  $\pi$ , ki reši enačbo

$$\alpha^{-1} * \pi^6 = \beta.$$

(c) Za vsako od cikličnih struktur iz točke (b) poišči vsaj dve različni rešitvi enačbe.

Vse odgovore dobro utemelji!

### 3. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 10. september 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

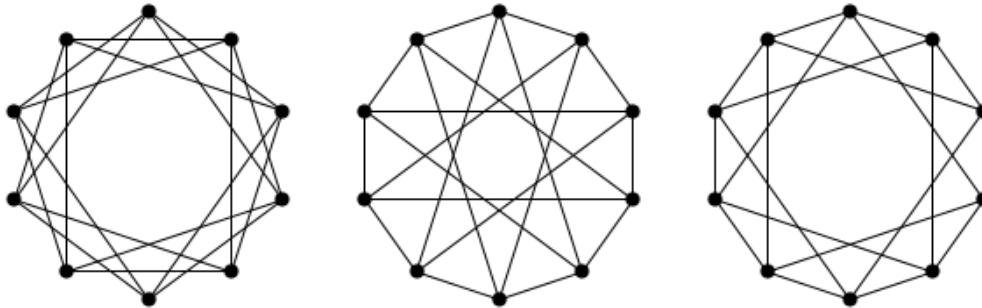
Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dan je tromestni izjavni veznik  $A(p, q, r) = p \wedge q \Rightarrow p \wedge r$ .

- (a) Ali je  $\{A\}$  poln nabor.
- (b) Kateri od  $\{A, 0\}$ ,  $\{A, 1\}$ ,  $\{A, \neg\}$  so polni?

2. (a) Ali so grafi na sliki Eulerjevi? Ali so Hamiltonovi?

- (b) Ali sta katera izmed grafov med sabo izomorfna?



3. Funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je podana s predpisom

$$f(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n$$

- (a) Izračunaj  $f(n)$  za  $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ .
- (b) Poišči vse  $n$ , za katere je  $f(n) = 3$ .
- (c) Ali je  $f$  injektivna. Ali je surjektivna? Je bijekcija? Odgovore utemelji!

4. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = (12)(34)(56).$$

- (a) Določi red in ciklično strukturo permutacij  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\alpha * \beta$  in  $\alpha * \beta * \alpha$ .
- (b) Pokaži, da ima pri neznanki  $\pi$  enačba

$$\pi^2 = \alpha * \beta$$

vsaj dve rešitvi, medtem ko enačba

$$\pi^2 = \alpha * \beta * \alpha$$

ni rešljiva.

Vse odgovore dobro utemelji!

# 1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 26. januar 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Za vsakega od spodnjih sklepov ugotovi, če je pravilen. Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

$$p \vee q, r \wedge s, p \Rightarrow \neg r, \neg s \vee t \Rightarrow \neg q \quad \models \quad \neg t$$

$$p \vee q, r \wedge s, p \Rightarrow \neg r, \neg s \vee t \Rightarrow \neg q \quad \models \quad t$$

2. Naj bodo  $A$ ,  $B$  in  $C$  dane množice,  $X$  pa neznana množica. Kdaj je rešljiv sistem enačb

$$B \cap C = A \cup X$$

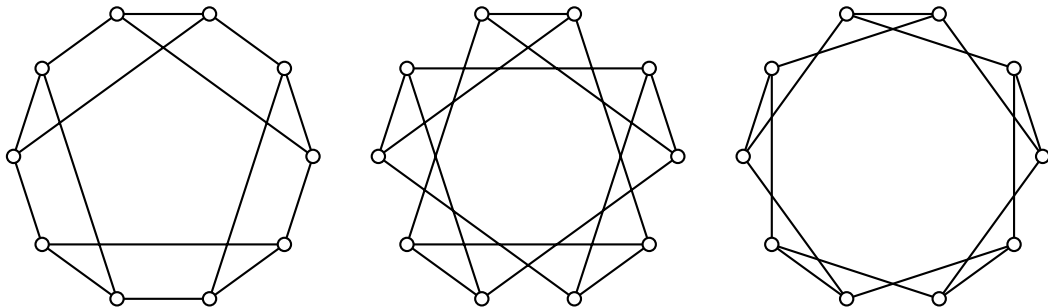
$$B \cup X = A \cap C$$

V primerih, ko je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

3. Na množici  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiramo relacijo  $R$  s predpisom

$$(a, b)R(c, d) \quad \text{natanko tedaj, ko} \quad (c - a)(d - b) \in \{-1, 1\}.$$

- (a) Poišči vse  $(c, d)$ , za katere je  $(10, 10)R(c, d)$ .  
(b) Pokaži, da je relacija  $R^+$  simetrična, tranzitivna in reflektivna.  
(c) Poišči ekvivalenčne razrede relacije  $R^+$ .
4. (a) Določi kromatična števila grafov na sliki.  
(b) Za vsakega od grafov na sliki ugotovi, ali je Hamiltonov.  
(c) Ali so kateri od grafov med sabo izomorfni? Zakaj oz. zakaj ne?



**Vse odgovore dobro utemelji!**

## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 10. februar 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti  $A_4$  z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dan je tromestni izjavni veznik  $A(p, q, r) \equiv p \Rightarrow q \vee \neg r$ .
  - (a) Izrazi implikacijo  $\Rightarrow$  samo z uporabo veznika  $A$ .
  - (b) Kateri od naborov  $\{A\}$ ,  $\{A, \Rightarrow\}$ ,  $\{A, \neg\}$ ,  $\{A, \vee\}$ ,  $\{A, \vee\}$  so polni?
2. Na množici  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  definiramo relacijo  $R$  z opisom:

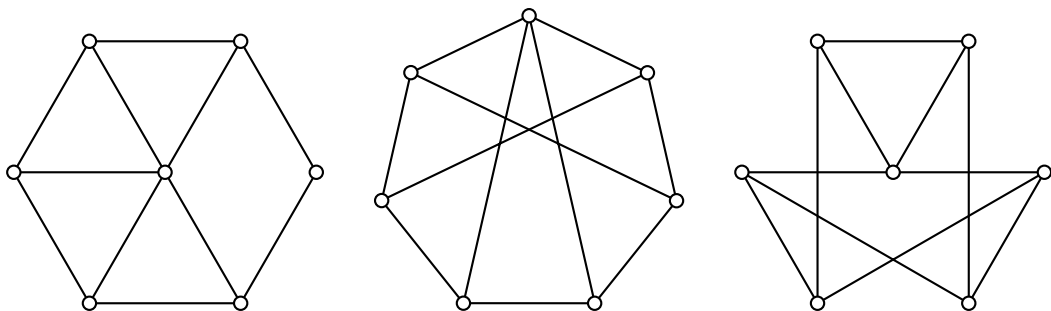
$aRb$  natanko tedaj, ko ima enačba  $ax + by = 3$  celoštevilske rešitve,

in relacijo  $S = R \cup \text{id}_A$ .

- (a) Nariši grafe relacij  $R$ ,  $R^2$  in  $S$ .
  - (b) Za relaciji  $R$  in  $S$  ugotovi, ali sta reflektivni, simetrični, tranzitivni.
  - (c) Ali je katera od relacij iz prejšnje točke ekvivalenčna?
3. Poišči vsaj tri različne rešitve enačbe

$$\pi^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10).$$

4.
  - (a) Določi kromatična števila grafov na sliki.
  - (b) Za vsakega od grafov na sliki ugotovi, ali je Hamiltonov.
  - (c) Ali so kateri od grafov med sabo izomorfni? Zakaj oz. zakaj ne?



Vse odgovore dobro utemelji!

### 3. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Ali je sklep

$$p \wedge q \Rightarrow r \vee s, s \vee (\neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t)) \models \neg s \Rightarrow (\neg p \vee t)$$

pravilen? Kaj pa sklep

$$p \wedge q \Rightarrow r \vee s, s \vee (\neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t)) \models \neg s \Rightarrow (p \vee t)?$$

Pravilnega dokaži, za napačnega pa poišči protiprimer.

2. Ali velja enakost

$$(A + C) \cap B = (A \cup B) \setminus (A \cap C)?$$

Ali velja vsebovanost

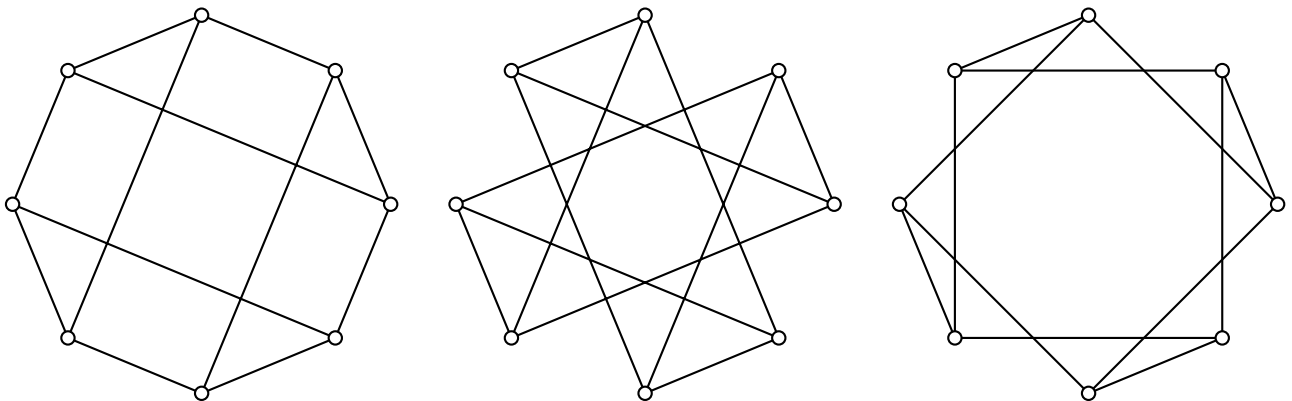
$$(A + C) \cap B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap C)?$$

3. Janezek se je pravkar vrnil z dvotedenskih počitnic. Seveda si je vsak dan privoščil sladoled ali sadno kupo. Porcija sladoleda je stala 3,5 evra, sadna kupa pa 4,1 evra. Po koncu počitnic je ugotovil, da je zapravil za slaščice kar 52 evrov. Koliko porcij sladoleda si je privoščil?

4. (a) Določi kromatična števila grafov na sliki.

(b) Za vsakega od grafov na sliki ugotovi, ali je Hamiltonov.

(c) Ali so kateri od grafov med sabo izomorfni? Zakaj oz. zakaj ne?



**Vse odgovore dobro utemelji!**



# 1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI

(Ljubljana, 25. januar 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na učilnica.fri.uni-lj.si.

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Prepričaj se, da sklep

$$\neg s \vee p, p \Rightarrow t, \neg q, r \Rightarrow t \quad \models \quad \neg r \wedge (s \Rightarrow t)$$

ni pravilen. Katerega od spodnjih izjavnih izrazov naj dodamo med predpostavke, da dobimo pravilen sklep?

$$q \Rightarrow t, q \Leftrightarrow t, t \Rightarrow r, t \Rightarrow \neg r$$

Zapiši dokaz dobljenega pravičnega sklepa.

2. Na množici  $A = \{1, 2, \dots, 6\}$  je podana relacija  $R$  s predpisom

$$xRy \quad \text{natanko tedaj, ko je izraz } x^2 + y \text{ deljiv s } 3.$$

(a) Nariši grafa relacij  $R$  in  $R^2$ .

(b) Ali je  $R$  delna urejenost?

(c) Ali je katera od relacij  $R$  oziroma  $R^2$  ekvivalenčna?

3. Poišči ostanek števila  $7^{5^{9^{10}}}$  pri deljenju z 19.

4. Dani sta permutaciji  $\alpha = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6)$  in

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi ciklično strukturo, red in parnost permutacije  $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ .

(b) Določi vse možne ciklične strukture za permutacijo  $\pi$ , ki reši enačbo

$$\pi^4 = \alpha * \beta * \alpha^{-1}.$$

(c) Poišči vse rešitve zgornje enačbe.

**Vse odgovore dobro utemelji!**

## 2. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 9. februar 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Dan je tromestni izjavni veznik  $A(p, q, r) = p \wedge q \Rightarrow r$ .

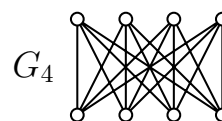
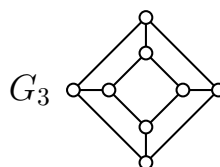
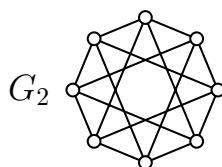
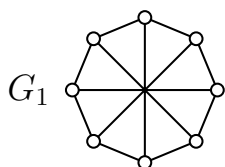
- (a) Izrazi konstanto 1 in implikacijo  $p \Rightarrow q$  z uporabo samo veznika  $A$ .
- (b) Izrazi  $p \wedge q$  ter  $p \vee q$  z uporabo veznikov  $A$  in  $\neg$ .
- (c) Ali je kateri od naborov  $\{A\}$ ,  $\{A, 1\}$ ,  $\{A, 0\}$ ,  $\{A, \neg\}$  poln?

2. Preslikava  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je dana z  $f(0) = f(1) = 0$ , za  $n > 1$  pa z opisom

$f(n)$  je vsota eksponentov potenc praštevil v praštevilskem razcepu  $n$ .

Tako je npr.  $f(2) = 1$ ,  $f(10) = f(2^1 \cdot 5^1) = 2$  in  $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 4$ .

- (a) Izračunaj  $f(6)$ ,  $f(7)$ ,  $f(8)$ ,  $f(9)$ .
  - (b) Ali obstaja tak  $n$ , da je  $f(n) = f(n + 4)$ ?
  - (c) Ali je  $f$  surjektivna?
  - (d) (*dodatnih 5 točk*) Ali obstaja tak  $n$ , da je  $f(n) = n + 4$ ?
3. Poišči vse rešitve diofantske enačbe  $-3x + 7y + 12z = 21$ . Koliko je takih, kjer so  $x$ ,  $y$  in  $z$  pozitivni?
4. Dani so grafi na spodnjih slikah.



- (a) Določi zaporedje stopenj točk za vsakega od grafov.
- (b) Kateri od zgornjih grafov so dvodelni?
- (c) Kateri pari danih grafov so izomorfni? *Natančno utemelji!*

**Vse odgovore dobro utemelji!**

### 3. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur UNI (Ljubljana, 25. avgust 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.

**Vse odgovore dobro utemelji!**

1. Za izjavne formule  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$  ugotovi, ali so paroma enakovredne. Če sta dve formuli enakovredni, to dokaži s preoblikovanjem po zakonih izjavnega in predikatnega računa, sicer pa poišči interpretacijo, v kateri se razlikujeta.

$$A = \exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \exists x (\neg P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$B = \exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$C = \exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$$

$$D = 1$$

2. Preslikava  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je dana z  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , za  $n > 1$  pa z opisom

$f(n)$  je vsota praštevil v praštevilskem razcepu  $n$ .

Tako je npr.  $f(2) = 2$ ,  $f(4) = f(2^2) = 2 + 2 = 4$ ,  $f(10) = f(2^1 \cdot 5^1) = 2 + 5 = 7$  in  $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 14$ .

- (a) Izračunaj  $f(6)$ ,  $f(7)$ ,  $f(8)$ ,  $f(9)$ .
  - (b) Ali je  $f$  injektivna?
  - (c) Ali je  $f$  surjektivna?
  - (d) Za katere  $n$  velja  $f(n) = n$ ?
3. Naj bo  $A = \{1, 2, \dots, 300\}$ .
- (a) Koliko števil iz množice  $A$  je deljivih z vsaj enim od števil 5, 6 ali 9?
  - (b) Koliko števil iz  $A$  je deljivih z natanko dvema od števil 5, 6 ali 9?
4. Poišči vsaj tri različne permutacije  $\alpha \in S_{10}$ , ki rešijo enačbo

$$\alpha^3 = (1\ 2)(3\ 5)(7\ 9)(4\ 6\ 8\ 10).$$

**Vse odgovore dobro utemelji!**