2. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 27. januar 2009

1. Člani sveta borze so glasovali za najslabšo delnico leta 2008. V ožji krog so prišle delnice podjetij A, B in C. Vsak član sveta borze je lahko glasoval za eno, dve, tri ali za nobeno delnico. Tako je za delnico A oddanih 10 glasov in za delnico B 6 glasov. Izključno za delnico C je glasovala $\frac{1}{11}$ vseh članov, kar je 3-krat manj kot število članov sveta, ki so se vzdržali glasovanja. Le dva člana sta oddala glasove vsaj za delnici A in B, en član vsaj za delnici B in C ter štirje člani vsaj za delnici A in C. Le en član sveta je upravičeno menil, da so vse tri delnice zanič.

   (a) Koliko je vseh članov sveta borze?

   (b) Ali se lahko odločimo, katera delnica je absolutno najslabša?

2. Kakšen je ostanek števila $5^{9^{13^{17}}}$ pri deljenju z 11?

3. Omarr Ra'fat Rasshid Khan (أُومَرّ أَفَت سّهِد كْهَن) premore 100 zlatnikov. Trgovec mu za 1 zlatnik ponuja 3 koze, za 3 zlatnike ovco, za 5 zlatnikov kamelo in za 103 zlatnike svojo hči za ženo. Pri tem se je Omarr odločil, da tokrat domov odpelje 100 glav živine in zapravi ves denar. Koliko kamel lahko Omarr pripelje domov?

4. Dani sta permutaciji α in β:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 2 & 1 & 3 & 9 & 10 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Določite β^{2009}.

   (b) Določite vse možne ciklične strukture permutacije π, ki reši enačbo

$$\alpha * \pi^{2002} * \alpha^{-1} = \beta\,.$$

   (c) Poiščite vsaj eno sodo in vsaj eno liho permutacijo π, ki rešita zgornjo enačbo.

   Pri tej nalogi je smer množenja permutacij nepomemben – lahko množimo od leve proti desni (produkt permutaci) ali pa od desne proti levi (kompozitum preslikav). Po drugi strani pa je smer branja imena Omarrja iz tretje naloge pomemben – v arabščini se bere od desne proti levi, latinska transkripcija pa od leve proti desni.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`. Rezultati bodo objavljeni v četrtek, 29. januarja. Ogled kolokvija bo v petek, 30. januarja, pred predrokom iz teorije.

2. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 21. januar 2010

1. V podjetju z 31 uslužbenci so dobili tri nove projekte. Pri prvem projektu sodeluje 8 zaposlenih. Pri drugem je aktivnih štirikrat več kot je tistih, ki ne delujejo na nobenem novem. Na prvem in drugem projektu jih je štirikrat manj kot samo na tretjem. Osem zaposlenih jih hkrati dela na drugem in tretjem projektu, 7 pa na tretjem in prvem. Pet zaposlenih sodeluje na vseh treh projektih. Koliko ljudi je udeleženih v največjem projektu in koliko jih trenutno ne dela na nobenem novem?

2. Kakšen je ostanek števila $7^{9^{2009^{2010}}}$ pri deljenju s 17?

3. Za vsak $n > 0$ definiramo permutacijo $\alpha_n \in S_{4n}$ s predpisom

$$\alpha_n(i) = \begin{cases} i-3 & ; \text{ če je } i \text{ deljiv s } 4 \\ i+1 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

   (a) Določi ciklično strukturo, parnost in red permutacij α_n.

   (b) Za katere n je enačba
   $$\pi^2 = \alpha_n^{2001}$$
   rešljiva? Kakšna je ciklična struktura rešitev?

   (c) Za najmanjši n pri katerem je zgornja enačba rešljiva poišči vse rešitve enačbe.

4. Naj bo $\mathcal{G}$ razred povezanih grafov, ki vsebujejo samo točke stopenj 3 in 5, pri čemer nobeni dve točki stopnje 5 nista sosedi.

   (a) Poišči in nariši grafa $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ s 6 oziroma 8 točkami.

   (b) Pokaži, da ne obstaja $G_3 \in \mathcal{G}$, ki ima natanko 7 točk.

   (c) Pokaži, da je $\chi(G) \leq 4$ za vsak $G \in \mathcal{G}$. Kako bi točke takšnega grafa obarval požrešno?

   (d) Pokaži, da v $\mathcal{G}$ obstaja graf s kromatičnim številom enakim 4.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

2. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 27. februar 2011

1. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

   (a) Pokaži, da permutaciji α in β komutirata, torej je $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

   (b) Naj bo

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Preveri, da je $(\alpha^2 * \beta^2)^2 = \gamma$, torej da je $(\alpha^2 * \beta^2)$ rešitev enačbe $\pi^2 = \gamma$, kjer je π neznana permutacija.

   Poišči vse možne ciklične strukture rešitev te enačbe.

   (c) Poišči še kakšno rešitev enačbe, ki ima nasprotno parnost kot permutacija $\alpha^2 * \beta^2$.

2. Naj bo a ostanek, ki ga daje število $5^{13^{23^{2011}}}$ pri deljenju s 24.

   Poiščite vse rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} ax + 17y &\equiv 1 \pmod{24} \\ 6x + 10y &\equiv 2 \pmod{24} \end{aligned}$$

3. Na izbor za tekmovanje Slovenija ima talent se je prijavilo 45 tekmovalcev. Vsak izmed treh sodnikov si izbere 20 kanditatov, ki si po njegovem mnenju zaslužijo nastop na tekmovanju. Samo prvi in drugi sodnik izbereta 5 tekmovalcev, samo drugi in tretji sodnik 6 tekmovalcev, samo prvi in tretji sodnik pa 7 tekmovalcev. Število tistih, ki so jih izbrali vsi sodniki je enako številu tistih, ki jih ni izbral nobeden od sodnikov.

   Na tekmovanje se uvrstijo tekmovalci, ki sta jih izbrala vsaj dva sodnika. Koliko izmed 45 prijavljenih tekmovalcev se uvrsti v naslednji krog?

4. Naj bo $\mathcal{G}$ množica grafov na sedmih točkah in dvanajstih povezavah, v katerih je vsaka točka stopnje 3 ali 4.

   (a) Koliko točk stopnje 3 in koliko točk stopnje 4 vsebujejo grafi v $\mathcal{G}$.

   (b) Ali obstaja v $\mathcal{G}$ kak nepovezan graf?

   (c) Ali obstaja v $\mathcal{G}$ kak dvodelen graf?

   (d) Ali obstaja v $\mathcal{G}$ kak graf, ki ne vsebuje niti ciklov dolžine 3 niti ciklov dolžine 4?

   (e) Ali obstaja v $\mathcal{G}$ kak graf, ki vsebuje poln graf na štirih točkah?

   Vse odgovore dobro utemelji!

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 22. januar 2013)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Koliko je naravnih števil med 1 in 16000, ki so deljiva s 4, 6 ali 9, niso pa deljiva z 12?

2. Za funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ velja: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ in

   $$f(n) = \text{vsota kvadratov vseh praštevilskih deliteljev } n$$

   za $n > 1$. Tako je npr. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, zato je $f(20) = 2^2 + 5^2 = 29$.

   (a) Izračunaj $f(n)$ za $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$.

   (b) Poišči $x \in \mathbb{N}$, za katerega je $f(x) = 150$.

   (c) Ali obstaja $y \in \mathbb{N}$, za katerega je $f(y) = 8$?

   (d) Ali je f injektivna? Ali je f surjektivna?

3. Študentje so se odločili, da organizirajo zabavo ob koncu izpitov, zato so se odpravili v trgovino po gosti sok in oranžado. Liter soka stane 80 centov, liter oranžade pa 88 centov. Plačali so 20 evrov in 80 centov. Koliko litrov oranžade so kupili, če veš, da so kupili več soka?

4. Pokaži, da ima enačba

   $$\pi^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   vsaj pet rešitev.

Vse odgovore dobro utemelji!

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 9. 1. 2014)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Na množici besed $\mathcal{B}$ definiramo relacijo R z naslednjim opisom:

   beseda α je v relaciji z besedo β, $\alpha R \beta$, če lahko besedo β sestavimo iz črk besede α z uporabo največ enega dodatnega znaka (črke).

   Tako je `hrast` R `trak`, vendar $\neg$(`hrast` R `krak`) in $\neg$(`hrast` R `strop`).

   (a) Denimo, da velja $\alpha R \beta$. V kakšni zvezi sta dolžini besed α in β?

   (b) Nariši graf relacije R v primeru, ko je

   $\mathcal{B} = \{$`klop`, `lok`, `oko`, `pot`, `prostor`, `roka`, `rosa`, `šola`, `šotor`, `top`, `zora`$\}$.

   (c) Določi (opiši z besedami) relacijo $R \cap R^{-1}$ za splošen $\mathcal{B}$. Lahko si pomagaš z grafom iz prejšnje točke.

2. Študent se mora pripraviti na dva kolokvija. Ima ogromno zalogo nalog, za učenje pa bo porabil točno 15 ur časa. Za rešitev ene naloge iz OMA potrebuje 16 minut, za rešitev ene naloge iz DS pa 18 minut.

   Koliko nalog pri vsakem predmetu naj reši, če se želi na oba predmeta čimbolj enakovredno pripraviti (torej rešiti približno enako število nalog).

3. Koliko števil na celoštevilskem intervalu $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ je deljivih z natančno tremi od števil 3, 5, 7, 9.

4. Dani sta permutacija $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ in enačba $\pi^3 = \alpha$.

   (a) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije α.

   (b) Določi vse dopustne ciklične strukture za neznano permutacijo π, pri katerih je enačba rešljiva.

   (c) Za vsako od dopustnih cikličnih struktur poišči vsaj eno rešitev.

Vse odgovore dobro utemelji!

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 22. januar 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Naj bo $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Eulerjeva funkcija, tj.

$$\varphi(n) = \text{število naravnih števil med 1 in } n, \text{ ki so tuja } n.$$

   (a) Poišči $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6)$.

   (b) Ali je φ injektivna? Surjektivna?

   (c) Dokaži, da za vse sode n velja
$$\varphi(n) \leq n/2.$$

   (d) Ali za vse $n \geq 3$ velja
$$\varphi(\varphi(n)) < n/2?$$

2. Poišči vse rešitve sistema kongruenčnih enačb

$$5x + 3y \equiv 8 \pmod{12},$$

$$4x + 8y \equiv 8 \pmod{12}.$$

3. Dane so permutacije

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad \beta = (1\ 2)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 3)(4\ 5)(4\ 10)(4\ 8)$$
$$\gamma = (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8)$$

   (a) Poišči ciklične strukture permutacij α, β, γ in določi njihove parnosti.

   (b) Poišči vse možne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$$

   (c) Poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe, ki ima najvišji možni red.

4. Eulerjev graf G ima devet točk in 12 povezav.

   (a) Določi minimalno stopnjo točke v takšnem grafu.

   (b) Kakšno je zaporedje stopenj njegovih točk? Možnih je več zaporedij.

   (c) Poišči štiri neizomorfne grafe z zgoraj omenjenimi lastnostmi.

Vse odgovore dobro utemelji!

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 14. januar 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na **ucilnica.fri.uni-lj.si**.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R:

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \gcd(a, b) > 3$$

   (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.

   (b) Ali sta relaciji R, R^2 simetrični, refleksivni oz. tranzitivni?

   (c) Ali je katera izmed relacij R oz. R^2 ekvivalenčna.

2. Naj bo $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1024\}$.

   (a) Koliko števil iz A je deljivih z vsaj enim od 2, 6, 8?

   (b) Koliko števil iz A je deljivih z 2 in 6 in ne z 8?

   (c) Koliko števil iz A je deljivih s 6 in ne z 8 in ne z 9?

3. Janezku je med vajami dolgčas, zato si izmisli naslednjo igro. Začne s številom 0 in na vsakem koraku prišteje ali odšteje 10 ali 22. Ali lahko na ta način pride do števila 1? Kaj pa do 8? Če je odgovor ne, pojasni, zakaj, sicer pa povej, kolikokrat mora prišteti ali odšteti vsako od števil, da bo skupaj uporabil čimmanj korakov (računskih operacij).

4. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \quad 2 \quad n)(1 \quad 3 \quad n) \cdots (1 \quad n-1 \quad n).$$

   (a) Zapiši permutacije π_4, π_5 in π_6.

   (b) Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.

   (c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n.

Vse odgovore dobro utemelji!

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 17. januar 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. (a) Koliko je števil med 360 in 720, ki so deljiva s 3 ali 5?
   (b) Koliko je števil med 1 in 360, ki so deljiva z 2, 3 ali 5, ne pa s 15?

2. Asistent je na eBayu kupil nekaj PNP tranzistorjev po 41 centov in nekaj NPN tranzistorjev po 37 centov. Skupaj je plačal 14 evrov in 90 centov. Koliko tranzistorjev posamezne vrste je kupil?

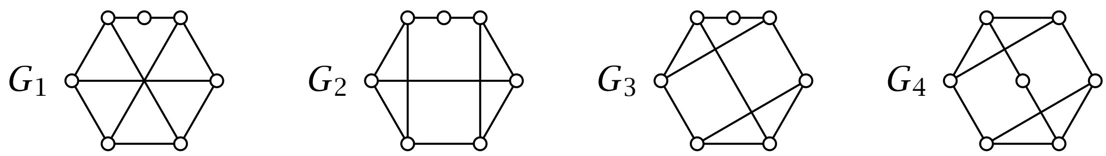
3. V množici S_9 vseh permutacij na 9 elementih opazujemo enačbo

$$\pi^2 = \pi^3 * \alpha * \pi,$$

   kjer je $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 9 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Določi parnost in red permutacije α.
   (b) Kaj so dopustne ciklične strukture permutacije π? Kolikšen je najmanjši možen red permutacije π?
   (c) Za vsako dopustno ciklično strukturo poišči eno rešitev.

4. Dani so grafi na spodnjih slikah.



   (a) Določi število vozlišč in število povezav za vsakega od grafov.
   (b) Kolikšne so dolžine najdaljših ciklov v teh grafih?
   (c) Kolikšne so dolžine najkrajših ciklov, ki gredo skozi vozlišče stopnje 2?
   (d) Kateri pari danih grafov so izomorfni? *Natančno utemelji!*

Vse odgovore dobro utemelji!

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 8. januar 2018)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Na množici celih števil $\mathbb{Z}$ definiramo relacijo R z opisom:

$$aRb \text{ natanko tedaj, ko je } a^2 \le b^2.$$

   (a) Ali velja $1R2$, $(-2)R1$, $1R(-3)$?

   (b) Prepričaj se, da je relacija R refleksivna in tranzitivna.

   (c) Ali je R simetrična? Je R antisimetrična? Zakaj oz. zakaj ne?

2. Naj bosta preslikavi $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ podani s predpisoma

$$f(x) = x + 3210 \quad \text{in} \quad g(x) = -x.$$

   (a) Pokaži, da je f bijekcija in se x in $f(x)$ razlikujeta vsaj[1] za 2018.

   (b) Pokaži, da je g bijekcija in je razlika med x in $g(x)$ poljubno velika[2].

   (c) Opiši kakšno bijektivno funkcijo $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, za katero velja, da se x in $h(x)$ razlikujeta vsaj za 2018 in je razlika med x in $h(x)$ lahko poljubno velika.

3. Koliko števil med 1 in 2018, ki niso deljiva z 49, je deljivih z vsaj enim od števil 15, 21?

4. (a) Izračunaj $\varphi(2017)$, $\varphi(2018)$ in $\varphi(2019)$, kjer je φ Eulerjeva funkcija.

   (b) Poišči ostanek števila 6057^{2018} pri deljenju z 2018. Odgovor utemelji!

   Za pomoč še tri malce večja praštevila: 673, 1009, 2017.

Vse odgovore dobro utemelji!

[1] Za vsak $x \in \mathbb{Z}$ je $|x - f(x)|$ vsaj 2018.

[2] Za vsako naravno število n obstaja $x \in \mathbb{Z}$, za katerega je $|x - f(x)|$ vsaj n.

2. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 7. januar 2019)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Na množici $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ je dana relacija R z opisom

$$aRb \ \ldots \ a \text{ in } b \text{ imata enako število prafaktorjev.}$$

(Tu štejemo število prafaktorjev skupaj z večkratnostjo, tako je npr. $5R7$ in $28R45$, vendar $\neg(14R28)$.)

   (a) Ali velja $2R61$, $4R62$, $25R30$?

   (b) Preveri, da je R ekvivalenčna relacija.

   (c) Poišči najmanjše število v $[2019]_R$.

   (d) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

2. Dana je linearna diofantska enačba

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

   (a) Poišči splošno rešitev te diofantske enačbe.

   (b) Kolikšna je vsota komponent rešitve; $x + y + z$?

   (c) Koliko je $x + y + z$, če so $x \geq 0$, $y \geq 0$ in $z \geq 0$?

3. (a) Koliko števil med 1 in 1260 je deljivih z vsaj enim od 6, 9 ali 21?

   (b) Koliko števil med 1 in 1260 je deljivih z 21 ali pa z obema 6 in 9?

4. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = (1\ 5\ 3\ 8\ 2\ 4)(6\ 9\ 7).$$

   (a) Preveri, da imata β in $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ enako ciklično strukturo.

   (b) Pokaži, da velja $(\alpha * \beta * \alpha^{-1})^2 = \alpha * \beta^2 * \alpha^{-1}$. Poskusi brez direktnega računa.

   (c) Poišči vse možne ciklične strukture permutacij

$$\alpha * \beta^k * \alpha^{-1}, \text{ ko } k \in \mathbb{N}.$$

Vse odgovore dobro utemelji!