

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

7. oktober 2022

Izjave

Izjava je stavek, ki je bodisi resničen bodisi neresničen.

Vsak stavek ni izjava:

- ▶ *Zapri vrata!*
- ▶ *Ta stavek ni resničen.*

Kaj pa:

- ▶ *Zunaj sveti Luna.*

Izjave

Izjave delimo po *vsebini* na

- ▶ *resnične* (imajo vrednost 1) in
- ▶ *neresnične* (imajo vrednost 0)

ter *obliki* na

- ▶ *osnovne* (tudi *enostavne*) in
- ▶ *sestavljene*.

Izjave

Zgleda osnovnih izjav:

- ▶ *Zunaj sije Sonce.*
- ▶ *Peter sedi na vrtu.*

Zgledi sestavljenih izjav:

- ▶ *Če zunaj sije Sonce, Peter sedi na vrtu.*
- ▶ *Peter sedi na vrtu in zunaj sije Sonce.*
- ▶ *Ni res, da zunaj sije Sonce.*

Izjavni vezniki

Izjave sestavljamo s pomočjo *izjavnih veznikov* (tudi *izjavnih povezav, logičnih veznikov*).

Izjavni vezniki so:

- ▶ *enomestni* (npr. *ne*)
- ▶ *dvomestni* (npr. *in, ali, če...potem..., niti...niti...*)
- ▶ *tromestni,...*

Izjavni vezniki

Resničnost sestavljene izjave je odvisna samo od resničnosti sestavnih delov. Zato izjavne veznike definiramo s pomočjo *resničnostnih tabel*.

- ▶ negacija \neg
- ▶ konjunkcija \wedge
- ▶ disjunkcija \vee
- ▶ implikacija \Rightarrow
- ▶ ekvivalenca \Leftrightarrow

Negacija

Negacija izjave A , $\neg A$, beremo "Ne A ".

$\neg A$ je resnična natanko tedaj, ko je A neresnična.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | $\neg A$ |
|-----|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Negacija je *enomestni* izjavni veznik.

Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B , označimo jo z $A \wedge B$, in beremo "A in B".

$A \wedge B$ je resnična n.t., ko sta **obe** izjavi A in B resnični.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | B | $A \wedge B$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B , označimo jo z $A \vee B$, in beremo "A ali B".

$A \vee B$ je resnična n.t., ko je **vsaj ena** od izjav A ali B resnična.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | B | $A \vee B$ |
|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Implikacija

Implikacija izjav A in B , označimo jo z $A \Rightarrow B$, in beremo

"Iz A sledi B " "Če A potem B " " A implicira B "

Izjavi A pravimo *antecedens* implikacije, izjavi B pa *konsekvens* implikacije $A \Rightarrow B$.

$A \Rightarrow B$ je **neresnična** samo v primeru, ko je izjava A resnična in izjava B neresnična.

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

Ekvivalenca

Ekvivalenca izjav A in B , označimo jo z $A \Leftrightarrow B$, in beremo

“ A ekvivalentno B ”

“ A natanko tedaj, ko B ”

“ A , če in samo če B ”.

$A \Leftrightarrow B$ je resnična n.t., ko imata **obe** izjavi A in B isto logično vrednost.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Dogovor o opuščanju oklepajev

Če ni z oklepaji drugače naznačeno, potem:

1. Negacija veže močnejše kot konjunkcija, konjunkcija veže močnejše kot disjunkcija, disjunkcija veže močnejše kot implikacija in implikacija veže močnejše kot ekvivalenca.
2. Istovrstni (dvomestni) vezniki vežejo od *leve proti desni*.

Izjavni izrazi

Osnovne izjave označujemo s črkami p, q, r, \dots

Namesto o izjavah govorimo o *izjavnih izrazih*.

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* p, q, r, \dots so izjavni izrazi.
3. Če so A_1, A_2, \dots, A_n izjavni izrazi in je F n -mestni izjavni veznik, potem je $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ izjavni izraz.

Konstruktivsko drevo in resničnostna tabela

Konstruktivsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak *nabor* logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

Tavtologija in protislovje

Izjavni izraz je *tavtologija*, če je resničen pri **vseh** naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Izjavni izraz je *protislovje*, če je **neresničen** pri **vseh** naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Izjavni izraz je *nevtralen*, če ni niti tautologija niti protislovje.

Enakovredni izjavni izrazi

Izjavna izraza A in B sta *enakovredna*, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost.

V tem primeru pišemo $A \sim B$.

Enakovredni izjavni izrazi

Izrek

Izjavna izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tautologija.

Naloga

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

| p | q | r | A |
|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO} , za katerega velja:

- ▶ $A \sim A_{DNO}$
- ▶ A_{DNO} je disjunktivna konjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{DNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

Naloga, znova

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

| p | q | r | A |
|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO} , za katerega velja:

- ▶ $A \sim A_{KNO}$
- ▶ A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{KNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

Kdaj KNO in DNO

Trditev

Vsak izjavni izraz ima DNO in

Vsak izjavni izraz ima KNO.

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B , ki vsebuje samo veznike \neg , \wedge , \vee .

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov \mathcal{N} je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B , ki vsebuje samo veznike iz \mathcal{N} .

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$$\{\neg, \vee\}, \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \Rightarrow\}, \quad \{0, \Rightarrow\}$$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:

Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov \mathcal{N} poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov \mathcal{Z} .
2. Vsak veznik iz znanega nabora \mathcal{Z} izrazimo samo z uporabo veznikov iz \mathcal{N} .

Še trije izjavni vezniki

- ▶ ekskluzivna disjunkcija $\underline{\vee}$
- ▶ Shefferjev veznik \uparrow
- ▶ Pierce-Lukasiewiczjev veznik \downarrow

Ekskluzivna disjunkcija

Ekskluzivna disjunkcija izjavnih izrazov A in B , označimo jo z $A \veebar B$, in beremo "A ekskluzivni ali B".

$A \veebar B$ je resnična n.t., ko je **natanko eden** od izjavnih izrazov A in B resničen.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | B | $A \veebar B$ |
|-----|-----|---------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Velja tudi $A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

Shefferjev veznik

Shefferjev veznik povezuje dva izraza A in B , kar označimo z $A \uparrow B$. Shefferjevemu vezniku pravimo tudi veznik NAND.

$A \uparrow B$ je **neresničen** n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B resnična.

Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | B | $A \uparrow B$ |
|-----|-----|----------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Velja tudi $A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$

Pierce-Lukasiewiczzev veznik

Pierce-Lukasiewiczzev veznik povezuje dva izraza A in B , kar označimo z $A \downarrow B$. Pravimo mu tudi veznik NOR.

$A \downarrow B$ je resničen n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B **neresnična**.

Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

| A | B | $A \downarrow B$ |
|-----|-----|------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Velja tudi $A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Ekskluzivna disjunkcija veže tako močno kot (navadna) disjunkcija.

$$A \vee B \underline{\vee} C \vee D$$

pomeni isto kot

$$((A \vee B) \underline{\vee} C) \vee D$$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Shefferjev in Pierce-Lukasiewiczhev veznik vežeta tako močno kot konjunkcija.

$$A \uparrow B \wedge C \downarrow D \uparrow E$$

pomeni isto kot

$$(((A \uparrow B) \wedge C) \downarrow D) \uparrow E$$

Zakoni z novimi vezniki

ekskluzivna disjunkcija

$$A \underline{\vee} B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$$

$$A \underline{\vee} B \sim B \underline{\vee} A$$

$$(A \underline{\vee} B) \underline{\vee} C \sim A \underline{\vee} (B \underline{\vee} C)$$

Shefferjev veznik

$$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$$

$$A \uparrow B \sim B \uparrow A$$

Pierceov veznik

$$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$$

$$A \downarrow B \sim B \downarrow A$$

Sklepanje v izjavnem računu

| | | |
|---------------|----|---|
| Predpostavke: | 1. | <i>Ta žival ima krila ali pa ni ptič.</i> |
| | 2. | <i>Če je ta žival ptič, potem leže jajca.</i> |
| | 3. | <i>Ta žival nima kril.</i> |
| Zaključek: | 4. | <i>Torej ta žival ne leže jajc.</i> |

Ali je ta sklep pravilen?

Formalizacija

ta žival ima krila ... k
ta žival je ptič ... p
ta žival leže jajca ... j

1. $k \vee \neg p$

2. $p \Rightarrow j$

3. $\neg k$

4. $\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov A_1, A_2, \dots, A_n, B je *pravilen sklep* s *predpostavkami* A_1, A_2, \dots, A_n in *zaključkom* B , če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$

in beremo:

Iz predpostavk A_1, A_2, \dots, A_n logično sledi zaključek B .

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridemo:

$$k \vee \neg p \sim 1$$

$$p \Rightarrow j \sim 1$$

$$\neg k \sim 1 \quad \text{in}$$

$$\neg j \sim 0$$

Protiprimer je žival, ki

- ▶ nima kril,
- ▶ ni ptič in
- ▶ leže jajca.

Pravila sklepanja

$$A, A \Rightarrow B \models B$$

modus ponens (MP)

$$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$$

modus tollens (MT)

$$A \vee B, \neg B \models A$$

disjunktivni silogizem (DS)

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$$

hipotetični silogizem (HS)

$$A, B \models A \wedge B$$

združitev (Zd)

$$A \wedge B \models A$$

poenostavitev (Po)

$$A \models A \vee B$$

pridružitev (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov C_1, C_2, \dots, C_m , kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \dots, m$ velja:

- (a) C_i je ena od predpostavk ali
- (b) C_i je tautologija ali
- (c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali
- (d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled pravičnega sklepa

Ali iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t ?

Pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B \Rightarrow C$ natanko tedaj, ko

$A_1, A_2, \dots, A_k, B \models C$.

Zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

Sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B$ natanko tedaj, ko

$A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B \models 0$.

Zgled

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

Analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$ natanko tedaj, ko

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_1 \models C$ *in*

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_2 \models C$.