

Izpit iz Osnov matematične analize 27. januar 2016

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi. Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se polarni koordinati izražata s kartezičnima.

(b) Zapišite de Moivrevo formulo za potenciranje kompleksnih števil.

(c) V kompleksni ravnini skicirajte območje

$$\mathcal{D} = \{z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, |z| \leq 1\}$$

Skicirajte območje, v katerega se \mathcal{D} preslika s preslikavo $z \mapsto 2iz^2 + 1$.

2. [15 točk] Zaporedja in vrste

(a) Število L je limita zaporedja (a_n) , če _____
_____.

(b) Število M je zgornja meja zaporedja (b_n) , če _____
_____.

Število M je natančna zgornja meja zaporedja (b_n) , če _____
_____.

(c) Podajte primer kakega nekonstantnega konvergentnega zaporedja z natančno zgornjo mejo 3.

Podajte primer kakega nekonstantnega divergentnega zaporedja z natančno zgornjo mejo 3.

3. [20 točk] Funkcije

(a) Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna v točki a , če velja _____
_____.

(b) Skicirajte graf kakšne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni zvezna v 1, za katero velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \nearrow 2} f(x) = 6 \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow 2} f(x) = 3.$$

(c) Za zvezno funkcijo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj velja

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 2, \quad g(-1) = g(3) = g(-3) = -1, \quad g(-2) = 50.$$

Kolikšno je najmanjše število ničel take funkcije?

- (d) Skicirajte primer zvezne funkcije $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, katere odvod ne obstaja v točki $x = 1$. Če takšna funkcija ne obstaja, utemeljite, zakaj ne.

4. [20 točk] Odvod

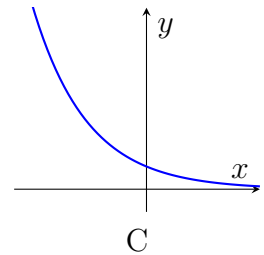
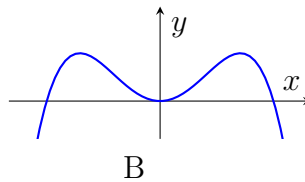
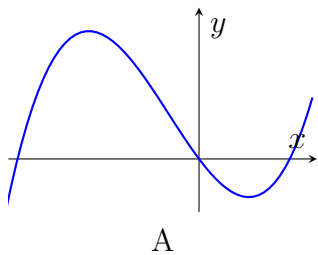
- (a) Kaj je gradient funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$?
- (b) Zapišite definicijo smernega odvoda $f_{\vec{v}}(x, y)$ funkcije f v točki (a, b) v smeri enotskega vektorja \vec{v} .
- Čemu je enak smerni odvod $f_{\vec{v}}(x, y)$ funkcije f v točki (a, b) v smeri enotskega vektorja $(0, 1)$?
- (c) Kako ugotovimo, ali se bo funkcijska vrednost $f(x, y)$ povečala ali zmanjšala, če se iz točke (a, b) za malo premaknemo v smeri enotskega vektorja \vec{e} .
- (d) V kateri smeri se moramo za malo premakniti iz točke (a, b) , da bo funkcijska vrednost $f(x, y)$ najhitreje padla?

5. [20 točk] Integral

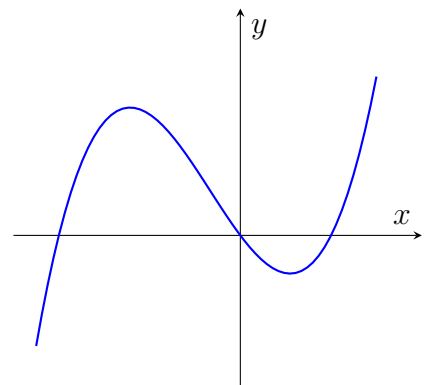
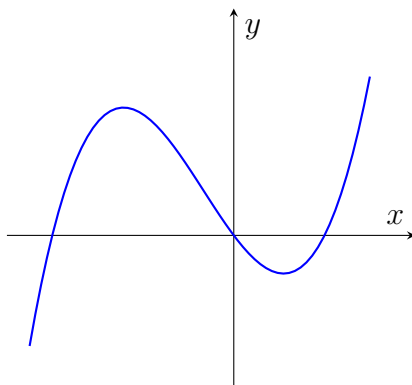
(a) Kaj je nedoločeni integral funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

(b) Zapišite osnovni izrek integralskega računa.

(c) Za katero od naslednjih treh funkcij je njen integral naraščajoča funkcija? Obkrožite in odgovor utemeljite.



(d) Za funkcijo f v levi graf jasno skicirajte njen odvod, v desnega pa njen integral.



6. [10 točk] Diferencialne enačbe

(a) Določite družino krivulj, ki je podana z diferencialno enačbo $xy' = 2y$.

(b) Določite diferencialno enačbo družine krivulj, ki je ortogonalna na družino iz (a).