Rešen 1. izpit iz OME
24. januar 2018

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. **[20 točk] Realna števila**

(a) Kaj je zgornja meja M in kaj je natančna zgornja meja $\sup A$ množice $A \subset \mathbf{R}$

Zgornja meja M množice A vsako število, za katerega velja $x \leq M$ za vsak $x \in A$.

Natančna zgornja meja $\sup A$ je najmanjša med vsemi zgornjimi mejami.

Za naslednje množice ugotovite, ali imajo natančno zgornjo mejo $\sup A$, in jo, če jo imajo, poiščite.

(b) $A = \{x \in \mathbf{R}; |x+3| < 2\}$

A je množica števil na številski premici, ki so od -3 oddaljena za manj kot 2. Torej $A = (-5, -1)$ in $\sup A = -1$.

(c) A je definicijsko območje funkcije $f(x) = \log(x^2 - 1)$

Množica $D_f = \{x : x^2 - 1 > 0\} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ni navzgor omejena, torej nima natančne zgornje meje.

(d) $A = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N} \right\}$,

Zaporedje $a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ je naraščjoče in ima limito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$, ki je tudi natančna zgornja meja množice členov. Torej je $\sup A = e$.

2. **[20 točk]Odvod in integral**

   Za funkcijo $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^2}{\sqrt{t^4+1}}\,dt$

   (a) zapišite njen odvod,
   $F'(x) = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^4+1}}$.

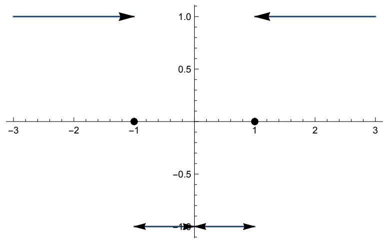
   (b) določite območja padanja in naraščanja,
   območje naraščanja: $F'(x) \geq 0$, *torej* $x \in [-1, 1]$,
   obmoǰe padanja: $F'(x) \leq 0$, *torej* $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

   (c) poiščite lokalne ekstreme.
   stacionarni točki: $F'(x) = 0$, *torej* $x_1 = -1$ *in* $x_2 = 1$,
   v točki x_1 *odvod spremeni predznak iz* $-$ *na* $+$, *torej je tam lokalni minimum,*
   v točki x_2 *odvod spremeni predznak iz* $+$ *na* $-$, *torej je tam lokalni maksimum.*

3. **[20 točk]Funkcije** Na predavanjih smo definirali funkcijo $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$

   Podana je funkcija $f(x) = \operatorname{sign}(\log x^2)$.

   (a) Določite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti in narišite graf.
   D_f: $x^2 > 0$, *torej* $x \neq 0$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



   $Z_f = \{-1, 0, 1\}$

   (b) Ali je $f(x)$ zvezna? Če ni, poiščite točke nezveznosti in v vsaki izračunajte levo in desno limito, če obstajata.
   f *ni zvezna, točki nezveznosti sta* $x = -1$ *in* $x = 1$.

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = 1 \quad \textit{in} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = -1$$

4. **Ekstremi funkcije več spremenljivk**

Dopolnite:

(a) Funkcija $f(x, y)$ ima v točki (x_0, y_0) lokalni maksimum, če
obstaja tak $\delta > 0$, da je funkcijska vrednost v vseh točkah, ki so od (x_0, y_0) oddaljene za manj kot δ, manjša ali enaka vrednosti $f(x_0, y_0)$.

(Šteje pa tudi kakšna manj formalna, vendar nedoumna definicija, na primer: "... je $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ za vse točke (x, y), ki so dovolj blizu točke (x_0, y_0).")

(b) V točki (x_0, y_0), kjer je lokalni ekstrem, je gradient grad $f(x_0, y_0)$ enak
$(0, 0)$.

(c) V točki, kjer je lokalni ekstrem, za Hessejevo matriko drugih parcialnih odvodov velja:
njena determinanta je pozitivna.

(d) Za funkcijo $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$ zapišite njen gradient in Hessejevo matriko drugih parcialnih odvodov, poiščite lokalne ekstreme in določite njihov tip.

$$\text{grad } f(x, y) = (2x - y + 9, -x + 2y - 6), \quad H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Stacionarne točke so rešitve sistema

$$2x - y + 9 = 0 \quad \textit{in} \quad -x + 2y - 6 = 0.$$

Edina stacionarna točka $x = -4, y = 1$ je lokalni minimum, ker je v tej točki $H > 0$ in $f_{xx} > 0$.

5. **Integral**

(a) Kaj pomeni oznaka $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$?

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dt.$$

(b) Izračunajte $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

Ulomek pod integralom razcepimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}, \quad \text{kjer je} \quad A = 1 \text{ in } B = -1$$

Izračunamo integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lim_{x\to\infty} (\log x - \log(x+1)) - (\log 1 - \log 2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + \log 2 = \log\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) + \log 2 = \log 1 + \log 2 = \log 2$$