· Ime in priimek: ______________________  Vpisna številka: __________________

# **Prvi rok iz OME**, 19.01.2020

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

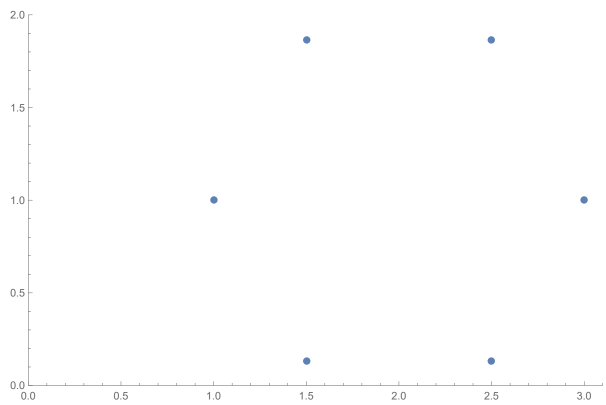
1. **[30 točk]**

(a) Napišite predpis transformacije kompleksne ravnine v kartezičnem ali polarnem zapisu, ki množico $A = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 1\}$ preslika v množico $B = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

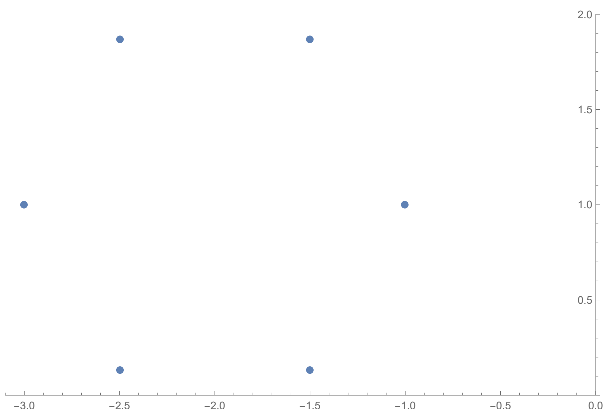
Če $A$ prezrcalimo čez $y$-os ($x+iy \mapsto -x+iy$) in premaknemo navzdol za $i$ ($x+iy \mapsto x+i(y-1)$), dobimo $B$. Predpis: $x+iy \mapsto -x+i(y-1)$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk. Pravilne rešitev so npr. tudi:
  - $z \mapsto -\overline{z} - i$.
  - $z \mapsto (z-i)e^{i\frac{\pi}{2}} = (z-i)i$.
  - $z \mapsto ze^{i\frac{\pi}{2}} + 1 = zi + 1$.
- Če ste narisali napačni množici $A$ in $B$ in pravilen predpis med njima, ste dobili 8 točk (v kolikor se transformacija ni bistveno poenostavila).
- Če ste pravilno narisali množici $A$ in $B$, predpis transformacije pa je bil delno pravilen, ste dobili največ 7 točk. Odvisno od tega, kako velika je bila napaka. Napaka, ki se je precej pojavljala, je zapis $z \mapsto ze^{i\frac{\pi}{2}} - i$, tj. najprej ste zavrteli $A$ za $\frac{\pi}{2}$, nato pa premaknili za $-i$. Če najprej zavrtimo $A$, moramo potem premakniti za 1 v desno, tj. prišteti 1.
- Če ste pravilno narisali množici $A$ in $B$, predpis transformacije pa je bil popolnoma napačen, ste dobili 3 točke.

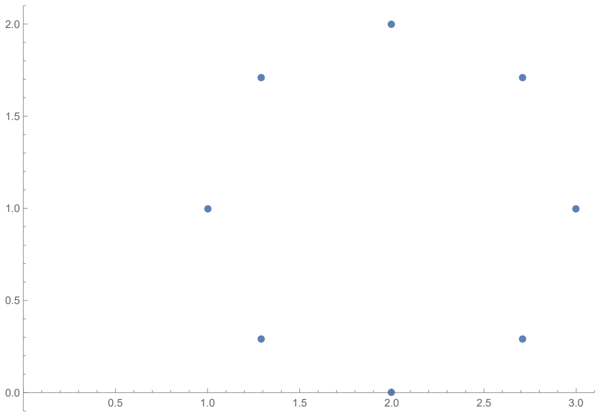
(b) Katera od naslednjih slik predstavlja rešitve enačbe $(z-2-i)^6 = 1$? Odgovor utemeljite.



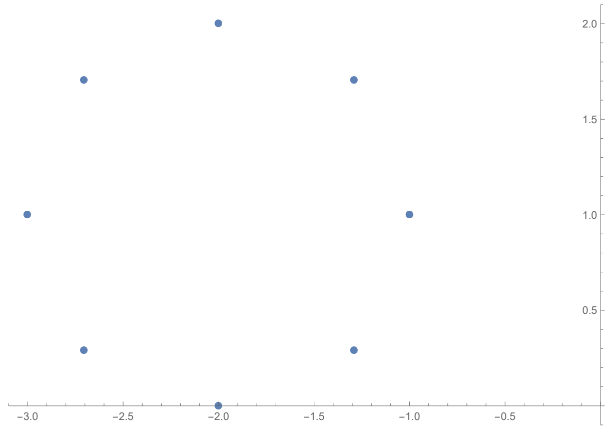
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Prava slika je 1. Enačba ima 6 rešitev. Gre ravno za 6-te korene enice, premaknjene za vektor $2 + i$.

- 10 točk ste dobili, če ste izbrali pravilno sliko in utemeljili, da ima enačba 6 rešitev in da gre za premik 6-tih korenov enice za 2 v desno in 1 navzgor.
- Za pravilno utemeljitev je izbire med sliko 1 in 2 je štelo tudi to, da ste vstavili točko $1 + i$ ali $3 + i$ v enačbo in opazili, da ji zadošča.
- Če ste utemeljili samo, da ima enačba 6 rešitev in zato izbiramo med sliko 1 in sliko 2, ste bodili 5 točk.
- Če ste utemeljili samo, da ima enačba rešitve v prvem kvadrantu in zato izbirate med sliko 1 in sliko 3, ste dobili 5 točk.
- Če ste navedli le pravilen odgovor brez vseh utemljitev, ste dobili 3 točke.

(c) Množico rešitev enačbe iz (1b) zavrtimo okrog izhodišča za kot $\frac{\pi}{3}$. Napišite enačbo, ki ji zadoščajo točke iz zavrtene množice.

Prava enačba je $(z - (2 + i)e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = 1$. Pri vrtenju točke ostanejo v isti medsebojni legi. Torej bodo še vedno tvorile 6-te korene 1, premaknjene za nek vektor. Premik je ravno središče krožnice, na kateri ležijo, tj. $(2 + i)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste poskusili zapisati enačbo, tako da ste napačen koeficient množili z $e^{i\frac{\pi}{3}}$, ste dobili 3 točke. Npr. $(z - (2 + i))^6 e^{i\frac{\pi}{3}} = 1$ ali pa $(z - (2 + i))^6 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. **[30 točk]**

(a) Opišite, kako bi iskali kandidate za ekstreme neke zvezno odvedljive funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ z definicijskim območjem $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Kandidate bi iskali z iskanjem stacionarnih točk, tj. takih točk $(x_0, y_0)$, ki zadoščajo pogoju $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ in ležijo v $\mathcal{D}_f$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Po klasifikaciji kandidatov naloga ni spraševala, tako da povezave s Hessejevo matriko ni bilo potrebno razlagati.

- Če ste tu razložili, da je potrebno iskati vezane ekstreme nad krožnico, točk niste dobili, saj tu ne gre za iskanje vezanih ekstremov nad neko krivuljo.

(b) Vemo, da ima vsaka zvezna funkcija $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$, kjer je $\mathcal{D}_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$, globalni minimum in globalni maksimum. Kako bi ju poiskali, če veste, da funkcija $g$ na $\mathcal{D}_g$ nima stacionarnih točk?
Če $g$ nima stacionarnih točk, so ekstremi na robu množice $\mathcal{D}_g$, tj. na krožnici $\{(x,y) \colon x^2+y^2 = 1\}$. Te pa poiščemo tako, da poiščemo stacionarne točke funkcije $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-1)$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste odgovorili samo, da je potrebno poiskati stacionarne točke Lagrangeove funkcije, ste dobili 5 točk. Če ste Lagrangeovo funkcijo navedli, ste dobili še ostalih 5 točk.
- Če ste na (2a) in (2b) narobe odgovorili, ste pa opisovali postopek iskanja stacionarnih točk in vezanih ekstremov, ste dobili skupaj za oba dela (2a) in (2b) 5 točk.

(c) Utemeljite, da ima vsaka zvezna funkcija $f : [0,1] \to [0,1]$ fiksno točko, tj. $\alpha \in [0,1]$, ki zadošča $f(\alpha) = \alpha$.
**Namig**: Definirajte funkcijo $g : [0,1] \to [0,1]$ s predpisom $g(x) = f(x) - x$ in zanjo uporabite izrek o vmesni vrednosti.
Velja $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$. Če je $g(0) = 0$, je $f(0) = 0$ in 0 je fiksna točka funkcije $f$. Sicer je $g(0) > 0$. Če je $g(1) = f(1) - 1 = 0$, je 1 fiksna točka funkcije $f$. Sicer je $g(1) < 0$ in po izreku o vmesni vrednosti obstaja $\alpha \in (0,1)$, da je $g(\alpha) = 0$ oz. $f(\alpha) = \alpha$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste razmišljali v pravo smer, niste pa znali formalno zapisati, ste lahko dobili do 8 točk. Odvisno od prepričljivosti zapisanih argumentov.

3. **[35 točk]** Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na vsakem intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Določite definicijsko območje funkcije $F(x,y) = \displaystyle\int_y^x f(t)\,dt$.
$D_F = \mathbb{R}^2$ (Funkcija $f$ je po predpostavki namreč integrabilna na vsakem zaprtem omejenem intervalu pod $\mathbb{R}$.)

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste napisali, da je $D_F = \mathbb{R}$, ste dobili 7 točk.
- Če ste napisali, da je $D_F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < x\}$ ali $D_F = [y,x]$ ali kaj podobnega, točk niste dobili.

(b) Naj bo $f$ strogo pozitivna funkcija. Določite množico ničel funkcije $F$, definirane kot v (3a).
Naj bo $x > y$. Ker je $f$ strogo pozitivna, je $\int_y^x f(t)\,dt \geq m(x-y) > 0$, kjer je $m = \min\{f(t) \colon t \in [y,x]\}$. Podobno za $y > x$ velja $\int_y^x f(t)\,dt < 0$. Torej je $\int_y^x f(t)\,dt = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$ in zato $\mathcal{Z}_F = \{(x,x) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste navedli pravo rešitev brez utemeljitve, ste dobili 5 točk. Če ste navedli, da je množica rešitev prazna, ste dobili 3 točke.
- Za pravilno utemeljitev je štelo tudi, da integral meri predznačeno ploščino, ki je tudi pozitivna (za $x > y$) oz. negativna (za $x < y$).

(c) Naj bo $f(t) = t$. Določite nivojnico funkcije $F$, na kateri leži točka $(2, 0)$.

Velja $F(x, y) = \left[\frac{t^2}{2}\right]_y^x = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Sledi $F(2, 0) = 2$ in zato $\mathcal{N}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 4\}$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste samo izračunali $F(2, 0)$, niste pa navedli nivojnice ali kako drugače razložili/nakazali zveze z nivojnico, ste dobili 5 točk.
- Če ste se zmotili v integralu za kakšno konstanto, sicer pa nalogo rešili po zgornjem postopku, ste dobili 7 točk.

(d) Izračunajte oba parcialna odvoda $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

Po osnovnem izreku integralskega računa je $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x)$ in

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_x^y -f(t)\, dt\right)(x, y) = -f(y).$$

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk, tudi če niste nikjer navedli sklica na osnovni izrek integralskega računa. (5 točk je bil pri tej nalogi bonus) Če ste pri parcialnem odvodu po $y$ pozabili na $-$, ste dobili skupaj 8 točk.
- Če ste izračunali parcialna odvoda za rešitev točke (3c), ste dobili 5 točk, v kolikor sta bila pravilna.