· Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

3. izpit iz OME, 19.08.2020

- Čas pisanja: **40 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [**30 točk**] **Zaporedja in vrste**

(a) [**8**] Zapišite Leibnitzov kriterij o konvergenci alternirajočih vrst.

(b) Naj bo dano zaporedje $\{a_n\}_n$, $n \geq 1$, s predpisom

$$a_n = \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, & n \text{ je deljiv s } 3, \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ ima ostanek 1 pri deljenju s } 3, \\ -\dfrac{1}{n}, & n \text{ ima ostanek 2 pri deljenju s } 3. \end{cases}$$

i. [**6**] Zapišite prvih 6 členov zaporedja $\{a_n\}_n$.

ii. [**8**] Poiščite neko konvergentno podzaporedje $\{b_n\}_n$ zaporedja $\{a_n\}_n$, ki ima pozitivno limito. Odgovor dobro utemeljite.

iii. [**8**] Poiščite neko podzaporedje $\{c_n\}_n$ zaporedja $\{a_n\}_n$, tako da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira. Odgovor dobro utemeljite.

2. **[30 točk] Funkcije in ekstremi**

Naj bosta dani funkciji

$$f(x,y) = \tan(\log(\sqrt{2-x^2-y^2})) \quad \text{in} \quad g(x,y) = 5 + x^2 + 2y^2.$$

(a) **[6]** Zapišite definicijo nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk.

(b) **[8]** Določite nivojsko krivuljo funkcije f skozi točko $(1,0)$ in jo narišite.

(c) **[6]** Zapišite definicijo vezanega ekstrema funkcije g pri pogoju $f(x,y) = 0$.

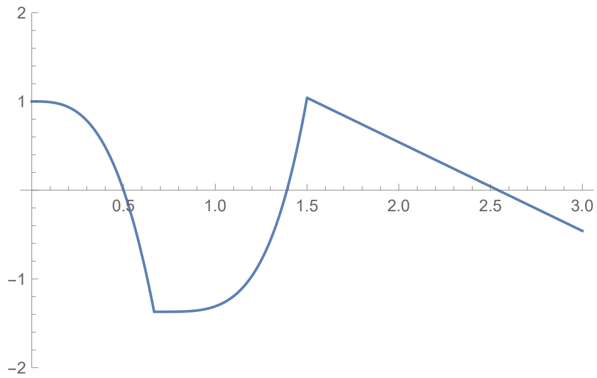
(d) **[10]** Določite vezane ekstreme funkcije g pri pogoju $f(x,y) = 0$.

Nasvet: Vpeljite novi spremenljivki $a := x^2$, $b := y^2$. Pogoj $f(x,y) = 0$ in definicijo funkcije $g(x,y)$ zapišite s spremenljivkama a in b. S tem se iskanje vezanih ekstremov zelo poenostavi.

3. [**40 točk**] **Odvod in integral**

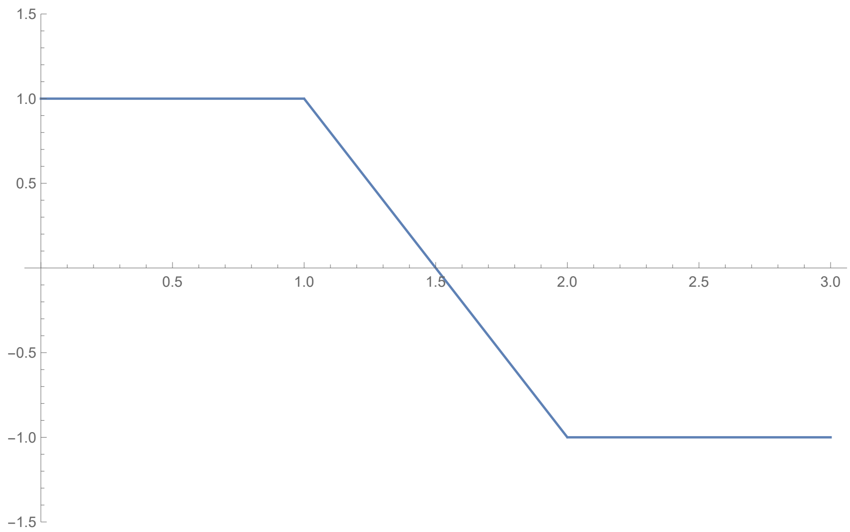
(a) [**6**] Zapišite definicijo globalnega maksimuma funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

(b) [**6**] Na naslednji skici je narisan graf odvoda neke odvedljive funkcije $f : [0,3] \to \mathbb{R}$. Označite x-koordinate točk, ki so kandidati za globalni **maksimum**.



(c) [**6**] Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

(d) [**8**] Na naslednji skici je narisan graf neke funkcije $f : [0,3] \to \mathbb{R}$. Na skico narišite enega izmed njenih nedoločenih integralov.



(e) **[6]** Zapišite definicijo konveksnosti funkcije na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

(f) **[8]** Narišite dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f : [0, 5) \to \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim pogojem:

- $f'(x) < 0$ za $x \in (0, 2)$.
- $f'(x) > 0$ za $x \in (2, 4) \cup (4, 5)$.
- $f''(x) < 0$ za $x \in (0, 1) \cup (3, 4)$.
- $f''(x) > 0$ za $x \in (1, 3) \cup (4, 5)$.
- f je navzgor neomejena.