· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: ___________________

2. izpit iz OME, 13.02.2020

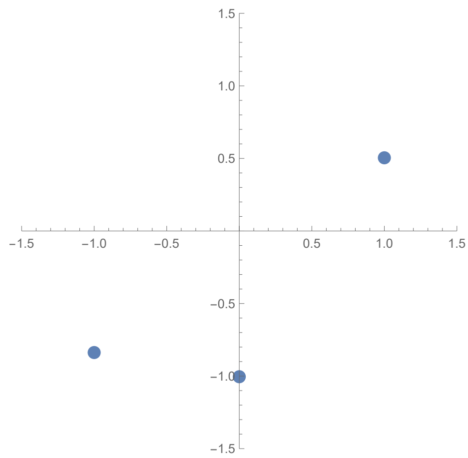
- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Številske množice**

(a) [**2**] Razložite pojem polarni zapis kompleksnega števila in v polarnem zapisu napišite formulo za potenciranje kompleksnega števila.

(b) i. [**2**] Naj bo dana kompleksna enačba $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, kjer so $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ realna števila, $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pa ena izmed njenih rešitev. Poiščite še eno rešitev te enačbe in dokažite, da gre res za rešitev.

ii. [**1**] Dana je enačba $z^6 - \frac{z^4}{18} - \frac{8z^3}{9} + \frac{17z^2}{16} - \frac{8z}{9} + \frac{305}{144} = 0$. Na spodnji sliki so narisane nekatere njene rešitve. Narišite še ostale. (*Namig:* Enačbe vam ni potrebno reševati.)



2. [**5 točk**] **Zaporedja in vrste**

(a) [**1**] Napišite definicijo limite zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

(b) i. [**1**] Napišite izrek o sendviču za limite zaporedij.

ii. [**1**] Naj bosta dani vrsti $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kjer je $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ in $b_n = \frac{1}{2^n}$. Koliko sta njuni vsoti A in B?

iii. [**2**] Naj bo $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kjer je $c_n \in \{a_n, b_n\}$. Npr., $c_0 = b_0, c_1 = a_1, c_2 = b_2, c_3 = a_3, \ldots$ Navzgor in navzdol omejite vsoto vrste C s pomočjo A in B. Odgovor dobro utemeljite.

3. [**5 točk**] **Funkcije**

(a) [**1**] Napišite definicijo leve limite funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) [**1**] Napišite primer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z levo in desno limito v točki $x = 0$, ki se med seboj razlikujeta.

(c) [**3**] Poiščite primere funkcij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo:

i. [**1**] g ni zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}$, $f \circ g$ pa je zvezna v točki a.

ii. [**1**] $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x)$ obstaja, $\lim_{x\to 0} f(x)$ pa ne.

iii. **[1]** $\lim_{x\to 0} g(x)$ obstaja, $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)$ pa ne.

4. **[5 točk] Odvod**

(a) **[1]** Napišite definicijo nivojnice funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

(b) **[1]** Napišite definicijo vezanega ekstrema funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ pri pogoju $g(x,y)=0$, kjer je $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ neka funkcija.

(c) **[3]** Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x-3xy+3y^2$. Za vsakega od naslednjih pogojev $g(x,y)=0$ ugotovite, ali vezani ekstremi za f obstajajo ali ne. Odgovore dobro utemeljite, ekstremov pa ni potrebno natančno izračunati.

i. **[1]** $g(x,y)=f(x,y)-10$.

ii. **[1]** $g(x,y)=y-x$.

iii. **[1]** $g(x,y)=x^2+y^2-1$.

5. **[5 točk] Integral**

(a) **[1]** Napišite definicijo določenega integrala funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(b) **[1]** Napišite definicijo posplošenega integrala $\int_1^\infty f(x)dx$ funkcije $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ in podajte primer funkcije, za katero obstaja.

(c) [**1.5**] Ali obstaja *zvezna* funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, za katero obstaja določen integral $\int_0^1 f(x)dx$, f pa nima pa primitivne funkcije na intervalu $(0,1)$? Če je odgovor da, podajte primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

(d) [**1.5**] Ali obstaja zvezna funkcija $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, ki ima primitivno funkcijo, ne obstaja pa določen integral $\int_0^1 \widetilde{f}(x)dx$ za nobeno razširitev $\widetilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcije f? Če je odgovor da, podajte primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

6. [**5 točk**] **Diferencialne enačbe**

(a) [**1**] Napišite definicijo ortogonalnih trajektorij na dano družino krivulj.

(b) [**4**] Poiščite ortogonalne trajektorije na družino parabol $\dfrac{y^2}{x} = a$, kjer je parameter $a \in \mathbb{R}$ realen.