Linearna metoda najmanjših kvadratov. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pokončna pravokotna matrika, t.j. A ima več vrstic kot stolpcev, $m \geq n$. Naj bo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ poljuben vektor. Kako bi poiskal pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na stolpčni prostor matrike A, $C(A)$? (Privzameš lahko, da so stolpci A linearno neodvisni, t.j. $\dim C(A) = n$.)

1. Realno funkcijo f želimo na intervalu $[a,b]$ aproksimirati s polinomom. To bomo (mogoče naivno) naredili tako, da bomo interval $[a,b]$ razdelili s $k+1$ ekvidistantnimi točkami $a = x_0, x_1, \ldots, x_k = b$ in poiskali koeficiente polinoma $p(x)$, ki se v smislu linearne metode najmanjših kvadratov najbolje prilega podatkom v spodnji tabeli.

x_0	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_k
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_i)$	$\cdots$	$f(x_k)$

   (a) Naj bo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom stopnje n. Zapiši matriko A in desno stran sistema $\mathbf{b}$, ki pripada podatkom iz zgornje tabele.

   (b) Poišči aproksimacije s polinomi stopenj 0, 1 in 2 za funkcijo $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ na intervalu $[-1,1]$, če uporabiš točke $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$.

   (c) Z uporabo `octave`-a poišči aproksimacije za $g(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na intervalu $[-1,1]$ s polinomi stopenj $0, 2, \ldots, 20$, če interval $[-1,1]$ razdeliš z 21 ekvidistantnimi točkami. Poišci aproksimacije za točne podatke in podatke z (umetno dodano) napako. Z uporabo ukaza `plot` nariši grafe originalne funkcije in vseh aproksimacij.

2. Uporabi linearno metodo najmanjših kvadratov še pri reševanju tega problema: V ravnini $\mathbb{R}^2$ imamo na znanih položajih $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ postavljenih n oddajnikov. Določiti želimo položaj (x, y) sprejemnika. Sprejemnik lahko zazna le jakost signala posameznih oddajnikov in na podagi tega določi razdalje $d_1, \ldots, d_n$ do teh oddajnikov. V idealiziranem primeru (ko so naši podatki točni) imamo za vsak $i = 1, \ldots, n$ enačbo
$$(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 = d_i^2.$$
Rešitev sistema teh enačb za $i = 1, \ldots, n$ pa nam da položaj sprejemnika (x, y).

   (a) Prva težava: zgornje enačbe *niso* linearne. Razlika vsakih dveh zaporednih enačb pa je linearna enačba. Poišči te razlike in zapiši ustrezen sistem $n-1$ linearnih enačb.

   (b) Zapiši matriko leve strani tega sistema $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 2}$ ter desno stran tega sistema $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Druga težava: Ker podatki *niso* točni, predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skoraj gotovo nima rašitev.

   (c) Poišči rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ po linearni metodi najmanjših kvadratov. Napiši `octave` funkcijo `X = sprejemnik([pi, qi], [di])`, ki za nabor položajev oddajnikov (p_i, q_i) in razdalj d_i poišče položaj sprejemnika $X(x, y)$. (Podatki (p_i, q_i) so dani v eni $n \times 2$ matriki, d_i pa v stolpcu višine n. Rezultat

X naj bo vrstica dolžine 2; `X = [x, y]`.) V funkcijo vključi tudi ustrezne *teste*, da preveriš pravilnost delovanja.

(d) Delovanje preveri še z umetnimi podatki iz datotek `oddajniki.txt` in `razdalje.txt` na spletni učilnici. V `octave` jih lahko uvoziš z ukazom `load`. Grafično prikaži rezultate.