

# Minimizacija

Digitalna vezja

Miha Moškon

[miha.moskon@fri.uni-lj.si](mailto:miha.moskon@fri.uni-lj.si)

<https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon>

# Sosednost

Dva konjunktivna logična izraza sta sosedna, če se razlikujeta po natanko eni negaciji

Natančneje:

Pogoj 1: oba izraza vsebujeta enake vhodne spremenljivke

Pogoj 2: razlikujeta se po točno eni negaciji

# Posledica sosednosti

Če imam dva sosedna konjunktivna izraza med seboj povezana preko disjunkcije, ju lahko združim v skupen konjunktiven izraz, v katerem vhodna spremenljivka, po kateri se razlikujeta, odpade

Primer:

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = (\bar{x}_1 \vee x_1) x_2 x_3 = 1 x_2 x_3 = x_2 x_3$$

Obe metodi minimizacije, ki ju bomo obravnavali, temeljita na takem načinu izločanja odvečnih spremenljivk

# Vsebovalniki

Vsebovalnik: konjunktivni izraz, ki pokrije skupino enic / skupino mintermov.

Glavni vsebovalnik: najkrajši možni konjunktivni izraz, ki pokrije skupino enic / mintermov

Potrebni glavni vsebovalnik: glavni vsebovalnik, ki pokrije enico, ki je ne more pokriti noben drug glavni vsebovalnik

# Minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO)

Najmanjša možna disjunktivna normalna oblika zapisa funkcije

Določanje na podlagi sosednosti

Izhajamo iz zapisa PDNO

# Tabelarična (Quine-McCluskey) metoda minimizacije – določitev glavnih vsebovalnikov

Začnemo z mintermi ( $n$  vhodnih spremenljivk) – stolpec  $n$

Stolpec  $i$ : Iščemo sosedne člene in njihove glavne vsebovalnike izpisujemo v naslednji stolpec ( $i - 1$ ); ko ne najdemo nobenega soseda več, nadaljujemo s postopkom v naslednjem stolpcu ( $i - 1$ )

Ponavljamo, dokler ne pridemo do stolpca 0 ali ne najdemo nobenega soseda več

S tem pridemo do glavnih vsebovalnikov

Tabelarična (Quine-McCluskey) metoda  
minimizacije – določitev potrebnih glavnih  
vsebovalnikov

Narišemo tabelo glavnih vsebovalnikov

Stolpci: mintermi, ki jih moramo pokriti

Vrstice: glavni vsebovalniki in njihova pokritja mintermov

Množica potrebnih glavnih vsebovalnikov: najmanjša množica glavnih  
vsebovalnikov, ki pokriva vse minterme → MDNO

Zgled  $f = \vee^4(1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$  zapiši v MDNO

Najprej zapišemo prvi stolpec (mintermi)

	$4$
(1)	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
(4)	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
(6)	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
(7)	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$
(8)	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
(9)	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
(10)	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$
(11)	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$
(15)	$x_1x_2x_3x_4$



Zgled  $f = \vee^4(1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$  zapiši v MDNO

Na podlagi sosednih izrazov določimo glavne vsebovalnike v naslednjem stolpcu. Pokrite minterme “obkljukamo”

$4$		$3$	
$(1)$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ ✓	$(1,9)$	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
$(4)$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ ✓	$(4,6)$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$
$(6)$	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$ ✓	$(6,7)$	$\bar{x}_1x_2x_3$
$(7)$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$ ✓	$(7,15)$	$x_2x_3x_4$
$(8)$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ ✓	$(8,9)$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
$(9)$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ ✓	$(8,10)$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$
$(10)$	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ ✓	$(9,11)$	$x_1\bar{x}_2x_4$
$(11)$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$ ✓	$(10,11)$	$x_1\bar{x}_2x_3$
$(15)$	$x_1x_2x_3x_4$ ✓	$(11,15)$	$x_1x_3x_4$

Zgled  $f = \vee^4(1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$  zapiši v MDNO

Nadaljujemo v naslednjem stolpcu

	4	3	2
(1)	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ ✓	(1,9)	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ ((8,9),(10,11)) $x_1\bar{x}_2$
(4)	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ ✓	(4,6)	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$ ((8,10),(9,11))
(6)	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$ ✓	(6,7)	$\bar{x}_1x_2x_3$
(7)	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$ ✓	(7,15)	$x_2x_3x_4$
(8)	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ ✓	(8,9)	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ✓
(9)	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ ✓	(8,10)	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ ✓
(10)	$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ ✓	(9,11)	$x_1\bar{x}_2x_4$ ✓
(11)	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$ ✓	(10,11)	$x_1\bar{x}_2x_3$ ✓
(15)	$x_1x_2x_3x_4$ ✓	(11,15)	$x_1x_3x_4$

Zgled  $f = \vee^4(1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$  zapiši v MDNO

Naprej ne gre...

Zapišemo tabelo pokritij:

	$m_1$	$m_4$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$	$m_{11}$	$m_{15}$
✓ $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	✓					✓			
✓ $\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$		✓	✓						
$\bar{x}_1x_2x_3$			✓	✓					
✓ $x_2x_3x_4$				✓					✓
$x_1x_3x_4$								✓	✓
✓ $x_1\bar{x}_2$					✓	✓	✓	✓	

Zgled  $f = \vee^4(1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$  zapiši v MDNO

Iz tabele lahko razberemo potrebne glavne vsebovalnike:

		$m_1$	$m_4$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$	$m_{11}$	$m_{15}$
✓	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	✓					✓			
✓	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$		✓	✓						
	$\bar{x}_1x_2x_3$			✓	✓					
✓	$x_2x_3x_4$				✓					✓
	$x_1x_3x_4$								✓	✓
✓	$x_1\bar{x}_2$					✓	✓	✓	✓	

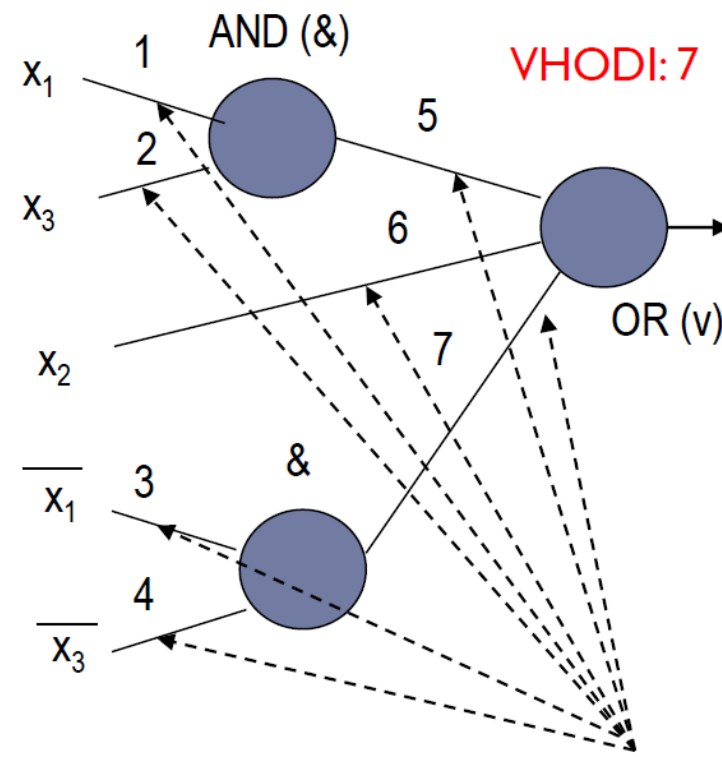
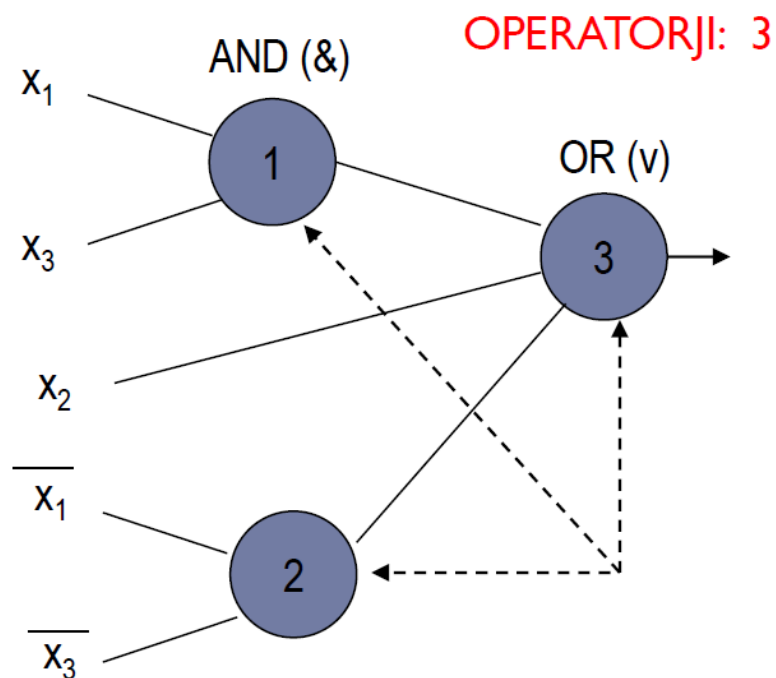
$$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

# Določitev kompleksnosti MDNO

Kriterij 1 (operatorji): štejemo število porabljenih konjunkcij in disjunkcij

Kriterij 2 (vhodi): štejemo skupno število vhodov v konjunkcije in disjunkcije

$$f_{\text{MDNO}}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$$



# Zgled – Določitev kompleksnosti MDNO

$$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

Vrat (operatorjev): 5

Vhodov (operandov): 15

# Določitev MKNO

- 1) Funkcijo negiramo
- 2) Določimo MDNO negirane funkcije
- 3) Negiramo MDNO negirane funkcije in dobimo MKNO izhodiščne funkcije

# Določitev MNO

- 1) Določimo MDNO
- 2) Določimo MKNO
- 3) Določimo kompleksnost MDNO in MKNO
- 4) MNO je tista, ki ima manjše število operatorjev; če je število operatorjev enako, je MNO tista, ki ima manjše število vhodov



# Tabelarična (Quine-McCluskey) metoda minimizacije

## Prednosti:

- primerna za večje število vhodnih spremenljivk
- relativno enostaven algoritem

## Slabosti:

- računska kompleksnost