Nelinearna metoda najmanjših kvadratov
Recimo, da imamo funkcijo $\mathbf{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kjer je $m > n$, in rešujemo sistem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Ker ima ta sistem več enačb kot neznank, v splošnem nima rešitev. Zato se (podobno kot pri linearnih sistemih) vprašamo, kaj je najboljši približek rešitve, tj. iščemo tisti $\mathbf{x} \in U$, za katerega je vrednost $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$ minimalna. Do rešitve nas pripelje *Gauss–Newtonova* iteracija s korakom oblike

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(J\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\right)^+ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

(Namesto prave rešitve $\mathbf{z}$ sistema $(J\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}))\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ iz enega koraka običajne Newtonove metode poiščemo rešitev tega sistema v smislu *linearne metode najmanjših kvadratov*. Tisti $(J\mathbf{F})^+$ je zgoraj napisan le zato, da formula izgleda krajša. V resnici metoda 'deluje' le za predoločene sisteme polnega ranga, za te pa pravzaprav ne potrebujemo Moore–Penroseovega posplošenega inverza.) Bolj natančno: ta postopek nam da en *lokalni* minimum funkcije $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$.

1. Podatke v tabeli (te podatke dobiš tudi na spletni učilnici)

x_i	0.038	0.194	0.425	0.626	1.253	2.500	3.740
y_i	0.050	0.127	0.094	0.2122	0.2729	0.2665	0.3317

   želimo modelirati s funkcijo oblike

$$f(x) = \frac{ax}{b+x}.$$

   Parametra a in b bomo poiskali po metodi najmanjših kvadratov.

   (a) Poišči rešitev z uporabo Newtonove metode. (Kako? Odvajaj zgornji izraz in poišči 'ničlo odvoda'.)

   (b) Poišči rešitev z uporabo Gauss–Newtonove metode.

2. Z Gauss–Newtonovo iteracijo bomo rešili nalogo iz 1. tedna vaj. V ravnini $\mathbb{R}^2$ imamo na znanih položajih $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ postavljenih n oddajnikov. Določiti želimo položaj (x, y) sprejemnika. Sprejemnik lahko zazna le jakost signala posameznih oddajnikov in na podagi tega določi razdalje $d_1, \ldots, d_n$ do teh oddajnikov. V idealiziranem primeru, ko so naši podatki točni, imamo za vsak $i = 1, \ldots, n$ enačbo

$$(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 = d_i^2.$$

   Rešitev sistema teh enačb za $i = 1, \ldots, n$ pa nam da položaj sprejemnika (x, y).

   Popravi funkcijo `X = sprejemnik([pi, qi], [di])` iz 1. tedna, ki za nabor položajev oddajnikov (p_i, q_i) in razdalj d_i poišče položaj sprejemnika $X(x, y)$. Začetni približek $\mathbf{x}^{(0)}$ je lahko kar tisto, kar nam je vrnila linearna metoda najmanjših kvadratov.