Geodetke na implicitno podanih ploskvah

V evklidskem prostoru (na primer v ravnini $\mathbb{R}^2$) je najkrajša pot med dvema točkama daljica. V ukrivljenih prostorih (kot so ploskve v prostoru $\mathbb{R}^3$) v splošnem ni 'ravnih' poti, najkrajša pot med dvema točkama pa je krivulja, ki jo imenujemo *geodetka*. V gladkih ukrivljenih prostorih se geodetko dobi kot rešitev določene diferencialne enačbe, za izpeljavo katere je v splošnem potrebno nekaj znanja diferencialne geometrije. Za poseben primer implicitno podane ploskve v $\mathbb{R}^3$ pa je možno izpeljati enačbe za geodetke precej enostavneje.

Cilj naloge je zapisati enačbe za geodetke za nekaj konkretnih primerov implicitno podanih ploskev (npr. sfero, elipsoid, torus itd) in napisati funkcijo, ki bo za dano ploskev numerično izračunala geodetko v dani začetni točki in smeri na ploskvi.

Izpeljava enačb

Dano imamo funkcijo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ki implicitno določa ploskev v $\mathbb{R}^3$ z enačbo

$$f(\mathbf{x}) = 0 \tag{1}$$

kjer smo označili $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Pogoj, da krivulja $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ leži na ploskvi, je torej, da $\mathbf{x}(t)$ zadošča enačbi (1). Z odvajanjem enačbe (1) po t lahko ta pogoj zapišemo tudi kot

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = 0 \tag{2}$$

kjer smo z $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ označili tangentni vektor na krivulji. Označimo še (normiran) normalni vektor na ploskev v točki $\mathbf{x}$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{grad} f(\mathbf{x})}{\|\mathrm{grad} f(\mathbf{x})\|}$$

in še projekcijski matriki na normalo ter tangentno ravnino v točki $\mathbf{x}$

$$Q = \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}, P = I - Q = I - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T} \tag{3}$$

kjer uporabljamo matrično množenje ($\mathrm{grad} f$ in s tem tudi $\mathbf{n}$ je vektor stolpec) in izpuščamo pisanje argumenta $\mathbf{x}$. Potem lahko pogoj (2), da krivulja leži na ploskvi (če malo premislimo) zapišemo tudi kot

$$\mathbf{v} = P\mathbf{v} \tag{4}$$

Enačbi (4) zadošča vsaka krivulja na ploskvi (ne samo geodetka). Če hočemo zapisati enačbo za geodetko, moramo (4) še enkrat odvajati po t:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{P}\mathbf{v} + P\dot{\mathbf{v}}$$

Geometrijski pogoj, da je krivulja na ploskvi geodetka, je, da mora biti vektor pospeška $\dot{\mathbf{v}}$ enak nič v vseh smereh, ki so tangentne na ploskev. Drugače rečeno, projekcija vektorja $\dot{\mathbf{v}}$ na tangentno ravnino mora biti enaka nič:

$$P\dot{\mathbf{v}} = 0$$

To lahko razumemo tudi fizikalno: telo, ki se giblje po geodetki 'čuti' pospešek kvečjemu v smeri, ki je normalna na ploskev, saj na sami ploskvi nanj ne deluje nobena sila.

Tako lahko zapišemo enačbo, ki ji mora zadoščati geodetka kot

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{P}\mathbf{v} = -\dot{Q}\mathbf{v} \tag{5}$$

ki skupaj z enačbo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ tvori sistem 6 diferencialnih enačb. Začetni pogoji so začetni položaj $\mathbf{x}_0$ in začetni tangentni vektor $\mathbf{v}_0$.

Enačba (5) se na pogled zdi precej enostavna, vendar je treba upoštevati, da je projekcijska matrika $Q = Q(\mathbf{x}(t))$ tu funkcija točke $\mathbf{x}$ na ploskvi in šele posredno funkcija parametra t, tako da se treba nekoliko potruditi pri izračunu odvoda $\dot{Q}$, če ga hočemo izraziti samo z odvodi funkcije f, ki definira ploskev, in tangentnega vektorja $\mathbf{v}$ v točki $\mathbf{x}$. Da bi izrazili (5) na čimbolj enostaven in ekspliciten način definiramo še Hessejevo matriko parcialnih odvodov 2. reda funkcije f:

$$\mathrm{Hess}f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Potem lahko z nekaj truda sistem enačb za geodetke na ploskvi zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mathrm{grad}f(\mathbf{x})}{\|\mathrm{grad}f(\mathbf{x})\|^2}\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathrm{Hess}f(\mathbf{x})\mathbf{v} \end{aligned} \tag{7}$$

Naloga

1. Izpeljite enačbo (7) iz enačbe (5). *Namig :* Pri izpeljavi je nekajkrat treba upoštevati, da je tangentni vektor na krivulji $\mathbf{v}$ v vsaki točki pravokoten na normalo ploskve $\mathbf{n}$ oz. grad$f$ (da torej velja enačba (2)).

2. Za čim več primerov implicitno podanih ploskev (torej funkcij f) napišite funkcije, ki za dano točko $\mathbf{x}$ na ploskvi vrnejo grad$f$, projekcijsko matriko P iz (3) in Hessejevo matriko (6). Te funkcije boste uporabili kot argumente funkcije, ki bo numerično reševala sistem (7).

3. Napišite funkcijo, ki za dano ploskev $f = 0$, točko $\mathbf{x}_0$ na ploskvi in tangentno smer $\mathbf{v}_0$ numerično izračuna in nariše geodetko na ploskvi. Lahko se zgodi, da pri numeričnem reševanju (vsaj če koraki niso dovolj majhni) krivulja počasi 'zleze' stran s ploskve. Razmlslite o tem, kako bi se to dalo popraviti.