Presek dveh implicitno danih ploskev

Ploskev v $\mathbb{R}^3$ lahko opišemo kot rešitev enačbe $f(\mathbf{x}) = 0$, kjer je $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$, f pa funkcija treh spremenljivk. Recimo, da imamo dve ploskvi, opisani z enačbama $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Presek ploskev je množica rešitev nelinearnega sistema enačb

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Če sta f_1 in f_2 gladki funkciji in so izpolnjeni še nekateri pogoji, je presek teh dveh ploskev gladka krivulja K. Namen naloge je poiskati to krivuljo.

Konstrukcija krivulje K

Enačbi $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$ lahko gledamo tudi kot enačbi nivojnic funkcij f_1 in f_2, krivulja K pa je presek teh nivojnic. Gradienta funkcij f_1 in f_2 sta v vsaki točki krivulje K torej pravokotna na K. To pomeni, da je $(\operatorname{grad} f_1) \times (\operatorname{grad} f_2)$ vektor, ki je tangenten na K. Pišimo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{(\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x})) \times (\operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}))}{\|(\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x})) \times (\operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}))\|}.$$

S tem predpisom je opisana vektorska funkcija $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Krivuljo K lahko potem razumemo kot rešitev diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

kjer je $\mathbf{x}_0$ neka začetna točka, ki leži v preseku obeh ploskev, tj. $f_1(\mathbf{x}_0) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}_0) = 0$. Ker je vektorski produkt v $\mathbf{F}$ normiran, je rešitev (1) celo parametrizirana z naravnim parametrom.

Enačbo (1) lahko rešujemo z numeričnimi metodami za reševanje diferencialnih enačb, recimo z Eulerjevo metodo ali metodami Runge-Kutta.

Odvisno od natančnosti izbrane metode in velikosti izbranega koraka h, ki jo uporabimo pri reševanju, pa bo v splošnem krivulja, ki jo na ta način dobimo, zaradi numeričnih napak lahko opazno ušla s preseka ploskev $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$ (lahko tudi že po enem koraku, če uporabljamo recimo Eulerjevo metodo ali je korak h malo večji). To lahko popravimo na ta način, da pri numeričnem reševanju na vsakem koraku sproti preverjamo, ali trenutna točka $\mathbf{y}$ dejansko leži dovolj blizu krivulji K, in se po potrebi premaknemo nazaj na krivuljo K na točko, ki je 'blizu' $\mathbf{y}$. Glede na to, da je dobro merilo za oddaljenost točke $\mathbf{y}$ od ploskev kar vrednost $f_1(\mathbf{y})$ oz $f_2(\mathbf{y})$, to storimo, kadar

$$d = \max\{|f_1(\mathbf{y}), |f_2(\mathbf{y})|\} \qquad (2)$$

preseže vnaprej predpisano vrednost $\varepsilon > 0$.

Če torej ocenimo, da je $\mathbf{y}$ predaleč od preseka ploskev, in če označimo $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, potem je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$ enačba ravnine, ki je blizu normalni ravnini na krivuljo K. Da iz $\mathbf{y}$ dobimo $\mathbf{x}_1$, ki dejansko leži na krivulji K, sedaj rešimo sistem nelinearnih enačb (z neznanko $\mathbf{x}$)

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Rešitev $\mathbf{x}_1$ tega sistema poiščemo z Newtonovo metodo z začetnim približkom $\mathbf{y}$. Pričakujemo seveda, da je $\mathbf{x}_1$ blizu $\mathbf{y}$. (Če ni, smo izbrali prevelik h.) Ko imamo $\mathbf{x}_1$, ki leži na krivulji, spet nadaljujemo z reševanjem d.e.

Manjša težava pri smiselnosti tega postopka: V praksi ne poznamo točke $\mathbf{x}_0 \in K$, s katero bi začeli, ampak poznamo le približek $\mathbf{y}$ za ta $\mathbf{x}_0$. Tega ni težko odpraviti: Če rešimo sistem (3) s tem približkom, dobimo $\mathbf{x}_0 \in K$ in lahko uporabimo opisani postopek.

Naloga

1. Zapiši pripadajočo vektorsko funkcijo $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ter njeno Jacobijevo matriko $J\mathbf{G}$ za sistem (3). (Oboje lahko seveda izraziš z f_i, grad f_i ter $\mathbf{y}$ in $\mathbf{v}$.)

2. Napiši `octave` funkciji

   ```
   X = presekPloskevEuler(f1, gradf1, f2, gradf2, X0, h, n, tol, maxit, epsilon)
   X = presekPloskevRK4(f1, gradf1, f2, gradf2, X0, h, n, tol, maxit, epsilon),
   ```

   ki za:

   - funkciji $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funkciji vektorskega argumenta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
   - gradienta $\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, vektorski funkciji $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
   - približek za začetno točko na krivulji `X0` (tega je treba najprej 'popraviti' s sistemom (3)),
   - dolžino koraka `h`,
   - število `n` zaporednih točk na krivulji, ki naj jih poiščemo,
   - toleranco `tol` za Newtonovo metodo in
   - največje dovoljeno število iteracij `maxit` za Newtonovo metodo
   - največja dovoljena 'oddaljenost' (v smislu (2) od preseka ploskev `epsilon`

   vrne $3 \times (n+1)$ matriko `X`, katere stolpci so krajevni vektorji zaporednih točk na K, tj. $X = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$. Prva funkcija pri reševanju uporablja Eulerjevo metodo, druga pa metodo Runge-Kutta 4. reda. *Drži se specifikacij!*

3. Na nekaj primerih ploskev in izbir za h in primerjajte, kako pogosto (v povprečju) metodi *presekPloskevEuler* in *presekPloskevRK4* opravita zgoraj opisan 'popravek', ko trenutno točko $\mathbf{y}$, ki se je preveč oddaljila od preseka ploskev, prestavi nazaj na K.

Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddaj naslednje:

1. datoteko **presekPloskev.m**, ki naj vsebuje *komentarje* **in** *test(e)*,
2. datoteko (poročilo) **solution.pdf**, ki vsebuje izpeljavo rešitve in odgovore na vprašanja.

S kolegi se lahko posvetuješ in lahko tudi skupaj rešujete nalogo, vendar moraš program in poročilo izdelati sam. Uporabljaš lahko vse `octave` funkcije, ki smo jih izdelali na vajah.