RT 2023: Domače naloge

Rok Žitko

1 Numerično reševanje enačbe gibanja

Napiši program za numerično reševanje enačbe gibanja $\ddot{\theta} + \theta = 0$ s končnimi časovnimi koraki Δt. Ugotovi, kako upada amplituda nihanja s časom zaradi numeričnih napak pri končnem Δt (namig: katera krivulja opisuje ovojnico?). Je numerična rešitev za periodo nihanja odvisna od Δt?

Napiši še program za numerično reševanje enačbe gibanja $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$. Kako je perioda odvisna od amplitude nihanja?

2 Dvojno nihalo

Napiši program za numerično reševanje enačb gibanja $\ddot{x_1} + x_1 + ax_2 = 0$, $\ddot{x_2} + x_2 + ax_1 = 0$, kjer je a majhna konstanta. Na začetku izmaknemo nihalo 1, nihalo 2 pa miruje. Kakšno gibanje dobimo?

Nariši kinetični energiji obeh nihal v odvisnosti od časa! Kako se pretaka energija med nihaloma?

3 Kompleksno nihalo

Dve linearni enačbi gibanja lahko rešimo hkrati, tako da eno koordinato spravimo v realni del, drugo pa v imagninarni del kompleksnega števila: $z = x + iy$. Napiši program za numerično reševanje dvodimenzionalnega nihala z enačbo gibanja $\ddot{z} + z = 0$. Kako izgledajo orbite v kompleksni ravnini? Obravnavaj še primer $\ddot{z} + f(z) = 0$ z različnimi izbirami funkcije f, denimo $f(z) = z^2$ in $f(z) = z^a$ z $a = 1.001$.

4 Valovni paket

Napiši program za seštevanje ravnih valov $y(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(k_i x)$. Kako za dan n izbrati amplitude A_i in valovna števila k_i, da dobimo čim bolj lokaliziran valovni pake?

5 Lastne vrednosti

Z matriko $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/9 \\ -1/9 & 1 \end{pmatrix}$ zaporedoma deluj na enotski vektor $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, torej $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_2$, itd. Kako se premika $\mathbf{v}_i$ po Blochovi sferi (ne pozabi normirati vektorja)?

6 Numerično reševanje Schoedingerjeve enačbe

Numerično reši enačbo $i\hbar \mathrm{d}/\mathrm{d}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ za

$$|\psi(t = 0)\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

in $H = \hbar\omega\sigma_z$. Čas merimo v enotah periode, zato izberemo kar $\omega = 2\pi$. Kako se normalizacija vektorja kvari s časom v odvisnosti od koraka Δt?

Nariši časovno odvisnost $\langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle$!

7 Dinamika spina v časovno spremenljivem polju

Napiši program, ki bo približno računal časovni razvoj stanja spina v časovno spremenljivem zunanjem magnetnem polju $B_z = B_0$ in $B_x = B_1 \sin(\omega t)$. Začetno stanje naj ima $\theta = \pi/8$ in $\phi = 0$. Izračunaj pričakovane vrednosti $\langle S_x(t) \rangle$, $\langle S_y(t) \rangle$, $\langle S_z(t) \rangle$.

8 Taylorjev razvoj

S Taylorjevim razvojem izračunaj funkciji $\exp(A)$ in $\exp(iA)$, kjer je matrika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Kako lastne vrednosti približkov n-tega reda konvergirajo k točnemu rezultatu?

9 Random walk

Naključno žrebaj trojice števil a_x, a_y, a_z na intervalu $[-1 : 1]$. Tvori matrike $A = 1 + \epsilon(a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z)$, kjer je ϵ neka majhna količina, denimo $\epsilon = 10^{-2}$. S takšnimi matrikami zaporedoma deluj na začetno stanje $|0\rangle$ (in vsakič normiraj na 1). Kako se giba stanje po Blochovi sferi?

10 Strelska metoda

Problem lastnih je naloga tipa $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$, kjer je A nek operator, λ pa neznana količina (lastna vrednost), ki pripada rešitvi $|v\rangle$. Schroedingerjeva enačba za kvantni delec je tudi tega tipa (razdelka 5.3 in 5.7). Obravnavajmo enodimenzionalni kvantni harmonski oscilator:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}k^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \tag{2}$$

Možen način reševanja je strelska metoda. Izberemo točko $x_0 < 0$, izberemo neki vrednosti $a = \psi(x_0)$ in $b = \psi'(x_0)$ v tej točki, in izračunamo vrednosti $\psi(x)$ za $x > x_0$. Za velike $x > 0$ bo rešitev divergirala proti $+\infty$ ali $-\infty$. S popravljanjem $b = \psi'(x_0)$ skušamo doseči, da rešitev ne divergira. Če nam to uspe, smo našli rešitev.

Nalogo si tu poenostavimo tako, da uporabimo znane vrednosti za lastne energije E, torej

$$E = \hbar\omega(n + 1/2), \tag{3}$$

kjer je $\omega = \sqrt{k/m}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ pa je celo število.

a) Napiši implementacijo tega algoritma. Postavi $\hbar = k = m = 1$, da se izraz poenostavi. Izberi recimo $x_0 = -10$. Določi dve vrednosti b, tako da bo za eno vrednost funkcija divergirala proti $+\infty$, za drugo pa proti $-\infty$. Potem z bisekcijo poišči rešitev.

b) Na ta način poišči osnovno stanje in prvi dve vzbujeni stanji kvantnega harmonskega oscilatorja in primerjaj s točno rešitvijo (razdelek 5.9.3)!