

# Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko  
Univerza v Ljubljani

6. januar 2023

## Kaj je graf

*Graf* je urejen par  $G = (V, E)$ , kjer je

- ▶  $V$  neprazna končna množica *točk (vozlišč)* grafa  $G$  in
- ▶  $E$  množica povezav grafa  $G$ , pri čemer je vsaka povezava *par* točk .

*Zgled:*  $V = \{u, v, w, x, y\}$        $E = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{v, x\}\}$

*Pisava:* Namesto  $e = \{u, v\}$  pišemo krajše  $e = uv$  ali  $e = vu$ . V tem primeru pravimo, da sta točki  $u$  in  $v$  *krajišči* povezave  $e$ . Pravimo tudi, da sta  $u$  in  $v$  *sosednji*, kar označimo z  $u \sim v$ .

*Oznake:*  $V = V(G)$  ... množica točk grafa  $G$   
 $E = E(G)$  ... množica povezav grafa  $G$

## Stopnje točk

*Stopnja* točke  $v \in V(G)$  je število povezav, ki imajo  $v$  za krajišče. Stopnjo točke  $v$  označimo z  $\deg(v)$ .

Točki stopnje 0 je *izolirana točka*, točki stopnje 1 pravimo tudi *list* grafa.

Graf  $G$  je  *$d$ -regularen*, če so vsa vozlišča grafa  $G$  stopnje  $d$ . 3-regularnim grafom pravimo tudi *kubični grafi*.

## Stopnje točk

### Izrek (Lema o rokoivanju)

Naj bo  $G$  graf z  $n$  točkami in  $m$  povezavami. Potem je

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2 \cdot m$$

### Posledica

V vsakem grafu je **sodo** mnogo točk **lihe** stopnje.

### Posledica

Naj bo  $G$   $d$ -regularen graf z  $n$  točkami in  $m$  povezavami. Potem je

$$n \cdot d = 2 \cdot m$$

## Izomorfizem grafov

Grafa  $G_1$  in  $G_2$  sta *izomorfna*, če obstaja preslikava  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ , za katero velja:

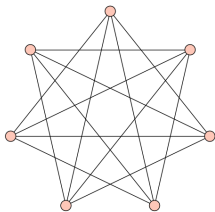
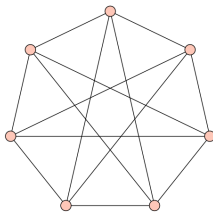
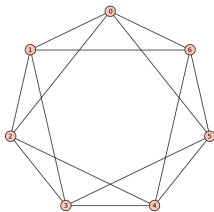
1.  $f$  je bijektivna in
2.  $u \sim_{G_1} v \Leftrightarrow f(u) \sim_{G_2} f(v)$ .

V tem primeru pravimo, da je  $f$  *izomorfizem* grafov  $G_1$  in  $G_2$ , ter pišemo  $G_1 \cong G_2$ .

### Trditev

*Izomorfizem ohranja število točk, število povezav, stopnje točk, število trikotnikov, ...*

Ali so izomorfni?



## Polni grafi

Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na  $n$  točkah označimo s  $K_n$ .

$$V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(K_n) = \{v_i v_j ; 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$\deg(v_1) = n - 1$$

$$|V(K_n)| = n$$

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$K_n$  je  $(n - 1)$ -regularen graf.

## Prazni grafi

Graf je **prazen**, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na  $n$  točkah označimo s  $\overline{K_n}$ .

$$V(\overline{K_n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(\overline{K_n}) = \emptyset$$

$$\deg(v_1) = 0$$

$$|V(\overline{K_n})| = n$$

$$|E(\overline{K_n})| = 0$$

$\overline{K_n}$  je 0-regularen graf.

$$\overline{K_1} = K_1$$



## Polni dvodelni grafi

$K_{m,n}$  je *polni dvodelni graf* na  $n + m$  točkah. Vsebuje dva *barvna razreda* s po  $n$  in  $m$  točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih.

$$V(K_{m,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$E(K_{m,n}) = \{v_i u_j ; 1 \leq i \leq m \text{ in } 1 \leq j \leq n\}$$

$$\deg(v_1) = n, \deg(u_1) = m$$

$$|V(K_{m,n})| = m + n$$

$$|E(K_{m,n})| = m \cdot n$$

$K_{n,n}$  je  $n$ -regularen.

$$K_{1,1} = K_2$$

# Cikli

*Cikel* na  $n \geq 3$  točkah označimo s  $C_n$ .

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(C_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$$

$$\deg(v_1) = 2$$

$$|V(C_n)| = n$$

$$|E(C_n)| = n$$

$C_n$  je 2-regularen graf.

$$C_3 = K_3, C_4 = K_{2,2}$$

# Poti

*Pot* na  $n$  točkah označimo s  $P_n$ .

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(P_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$$

$$\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 2$$

$$|V(P_n)| = n$$

$$|E(P_n)| = n - 1$$

$$\text{če } n \geq 3.$$

$$P_1 = K_1 = \overline{K_1}, P_2 = K_2 = K_{1,1}, P_3 = K_{2,1}$$

# Hiperkocke

Točke *d*-razsežne hiperkocke  $Q_d$  so zaporedja ničel in enic dolžine *d*. Dve takšni točki-zaporedji sta sosedni, če se razlikujeta v natanko enem členu.

$$|V(Q_d)| = 2^d$$

$$|E(Q_d)| = d \cdot 2^{d-1}$$

$Q_d$  je *d*-regularen graf.

$$Q_0 = K_1, Q_1 = K_2, Q_2 = C_4$$

## Operacije z grafi

Poznamo naslednje elementarne operacije z grafi:

- ▶ *odstranjevanje povezave*:  $G \mapsto G - e$
- ▶ *dodajanje povezave*:  $G \mapsto G + f$
- ▶ *odstranjevanje točke*:  $G \mapsto G - v$

## Podgrafi

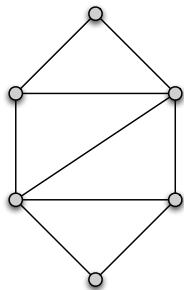
Pravimo, da je  $H$  *podgraf* grafa  $G$ ,  $H \subseteq G$ , če je  $V(H) \subseteq V(G)$  in  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Podgraf  $H$  grafa  $G$  je *vpeta podgraf*, če je  $V(H) = V(G)$ .

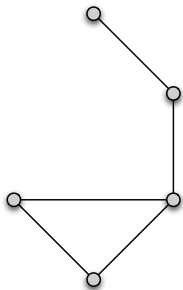
Podgraf  $H$  grafa  $G$  je *induciran podgraf*, če za vsako povezavo  $e = uv \in E(G)$  velja: če sta  $u$  in  $v$  točki grafa  $H$ , potem je tudi  $e$  povezava v grafu  $H$ .

Oznake:  $G[U]$  *induciran*,  $G[F]$  *vpeta*, pri  $U \subseteq V(G)$  in  $F \subseteq E(G)$ .

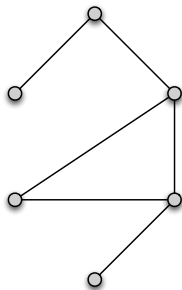
## Zgledi podgrafov



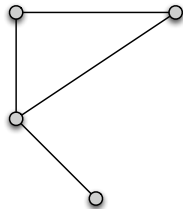
Graf  $G$ .



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$ ,  
vpet.



$H_3 \subseteq G$ ,  
induciran.

## Sprehodi v grafih

*Sprehod*  $S$  v grafu  $G = (V, E)$  je zaporedje točk

$$u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n,$$

pri čemer sta zaporedni točki sprehoda  $u_i$  in  $u_{i+1}$  **sosedi** v grafu  $G$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ).

*Dolžina* sprehoda  $S = u_0 u_1 \dots u_n$  je enaka  $n$ ,  $|S| = n$ .

Točko  $u_0$  imenujemo *začetek*, točko  $u_n$  pa *konec* sprehoda.  *$u-v$  sprehod* je sprehod z začetkom v  $u$  in koncem v  $v$ .

Sprehod  $S = u_0 \dots u_n$  je *pot*, če  $u_i \neq u_j$  za vse  $0 \leq i < j \leq n$ .

Sprehod  $S = u_0 \dots u_n$  je *obhod*, če je  $u_0 = u_n$ .

Sprehod  $S = u_0 \dots u_n$  je *cikel*, če je  $u_0 = u_n$ , sicer pa so točke med sabo različne in je  $n \geq 3$ .



## Sprehodi, operacije

Za sprehoda

$$S = u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k$$

in

$$Z = u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_{\ell-1} u_{\ell}$$

je

- ▶  $S^R = u_k u_{k-1} \dots u_1 u_0$   
*obratni sprehod* k  $S$ ,
- ▶  $SZ = u_0 u_1 \dots u_{k-1} u_k u_{k+1} \dots u_{\ell-1} u_{\ell}$   
*stik sprehodov*  $S$  in  $Z$  in
- ▶  $S_{u_i u_j} = u_i u_{i+1} \dots u_{j-1} u_j$ , kjer  $i, j$  zadoščata  $0 \leq i \leq j \leq k$   
*odsek sprehoda*  $S$ .

## Sprehod ali pot, povezanost

### Lema

Če v grafu  $G = (V, E)$  obstaja  $u - v$  sprehod  $S$ , potem v  $G$  obstaja tudi  $u - v$  pot.

### Posledica (dokaza zgornje leme)

Najkrajši  $u - v$  sprehod v grafu je pot.

Graf  $G$  je *povezan*, če za vsaki dve točki  $u, v \in V(G)$  v grafu  $G$  obstaja  $u - v$  sprehod

.

## Povezane komponente

V množici točk grafa  $G$  definirajmo relacijo  $P$  z naslednjim predpisom:

$$uPv \iff \text{v } G \text{ obstaja } u - v \text{ sprehod.}$$

## Razdalja v povezanem grafu

Naj bo  $G$  povezan graf. *Razdalja* med točkama  $u$  in  $v$  v grafu  $G$ ,  $dist(u, v)$ , je dolžina najkrajše  $u - v$  poti (sprehoda) v  $G$ .

### Trditev

*Razdalja  $dist$  v povezanem grafu ustreza **trikotniški neenakosti**, za poljubne tri točke  $u, v, w$  grafa  $G$  velja*

$$dist(u, w) \leq dist(u, v) + dist(v, w)$$

## Dvodelni grafi

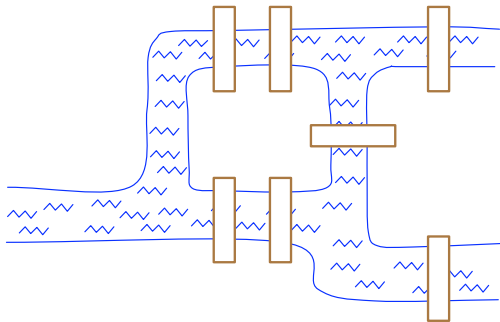
Graf  $G$  je *dvodelen*, če lahko točke grafa  $G$  pobarvamo z dvema barvama takó, da ima *vsaka* povezava krajišči različnih barv.

### Izrek

*Graf  $G$  je dvodelen natanko tedaj, ko  $G$  ne vsebuje ciklov lihe dolžine.*

## Eulerjev problem

Euler, 1736  
Königsberg.



- ▶ *Ali obstaja obhod po mestu, ki bi prehodil vse mostove in sicer vsakega natanko enkrat?*

## Eulerjevi grafi

Sprehod v grafu  $G$  je *enostaven*, če vsako povezavo *uporabi* največ enkrat.

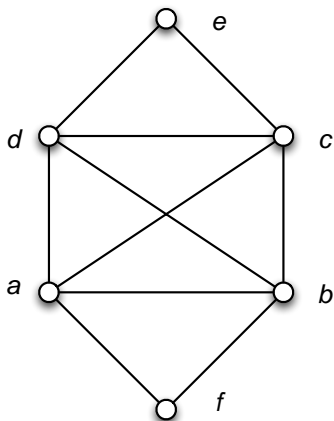
*Problem:* Ali v grafu  $G$  obstaja *enostaven obhod*, ki vsebuje *vse* povezave in *vsa* vozlišča?

Enostaven obhod v grafu  $G$ , ki vsebuje vse povezave in vsa vozlišča imenujemo *Eulerjev obhod*.

Graf  $G$  je *Eulerjev*, če ima kak Eulerjev obhod.

## Eulerjevi grafi

Zgled:



► Eulerjev obhod:



# Eulerjev izrek

## Izrek (Euler)

*Graf  $G$  je Eulerjev natanko tedaj, ko je  $G$  povezan in so vsa njegova vozlišča sodih stopenj.*

## Posledica

*Graf je Eulerjev natanko tedaj, ko ga lahko narišemo z eno samo potezo, ki je povrh vsega še sklenjena.*

# Drevesa in gozdovi

*Drevo* je povezan graf brez ciklov.

*Gozd* je graf brez ciklov.

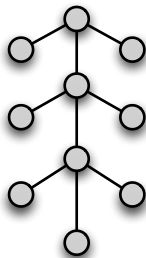
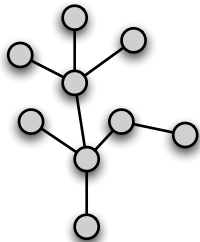
## Trditev

*G je gozd*  $\iff$  *povezane komponente G so drevesa.*

*G je drevo*  $\iff$  *G je povezan gozd.*

# Zgledi

Grafi  $P_n$  in  $K_{1,n}$  so drevesa.



## Prerezne točke in povezave

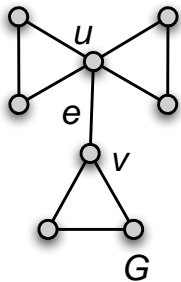
Točka  $v \in V(G)$  je *prerezna točka* grafa  $G$ , če ima  $G - v$  strogo več povezanih komponent kot  $G$ .

Povezava  $e \in E(G)$  je *prerezna povezava* grafa  $G$ , če ima  $G - e$  strogo več povezanih komponent kot  $G$ .

### Trditev

$e \in E(G)$  je *prerezna povezava natanko tedaj, ko  $e$  ne leži na nobenem ciklu v grafu  $G$ .*

## Prerezne točke in povezave



$u$  in  $v$  sta prerezni točki v grafu  $G$ ,  $e$  je prerezna povezava.

## Lastnosti dreves

Naj bo  $T$  drevo z  $n$  točkami in  $m$  povezavami.

1.  $T$  je povezan graf.
2.  $T$  je brez ciklov.
3.  $m = n - 1$ .
4. Vsaka povezava v  $T$  je prerezna.
5. Za poljubni točki  $u, v \in V(T)$  obstaja natančno ena  $u - v$  pot v  $T$ .
6. Če drevesu  $T$  dodamo katerokoli novo povezavo, vsebuje dobljeni graf natanko en cikel.

## Vpeto drevo

Naj bo  $G$  graf in  $H \subseteq G$ .  $H$  je *vpeto drevo* v  $G$ , če je

- ▶  $H$  vpet podgraf v  $G$  in
- ▶  $H$  drevo.

# Lastnosti vpetih dreves

## Izrek

$G$  je povezan  $\iff G$  ima vsaj eno vpeto drevo.

## Trditev

Če je  $T$  drevo in je  $|V(T)| \geq 2$ , potem ima  $T$  vsaj dva lista.

## Posledica

Če je  $G$  povezan in je  $|V(G)| \geq 2$ , potem vsebuje  $G$  vsaj dve točki, ki **nista** prerezni.

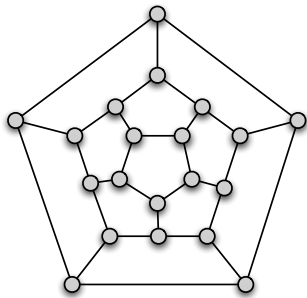
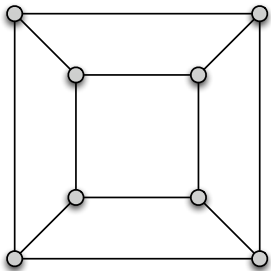


## Hamiltonovi grafi

*Cikel* v grafu  $G$  je *Hamiltonov*, če vsebuje vse točke grafa  $G$ .

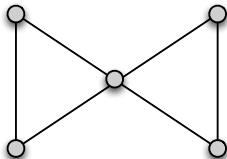
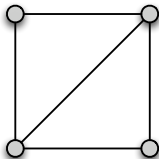
Graf  $G$  je *Hamiltonov*, če vsebuje kak Hamiltonov cikel.

Zgleidi



## Zgledi

Kakšna je zveza med Hamiltonovimi in Eulerjevimi grafi?



## Kako prepoznati Hamiltonove grafe

Hamiltonov problem je mnogo **težji** kot Eulerjev.

**Ne obstaja** enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov.

Spoznali bomo en *potreben pogoj*, da je graf Hamiltonov in en *zadosten pogoj*, da je graf Hamiltonov.

## Potrebni pogoj z razpadom grafa

### Izrek

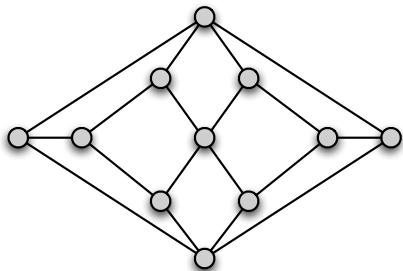
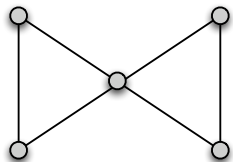
Naj bo  $G$  povezan graf. Denimo, da obstaja takšna podmnožica točk grafa  $S \subseteq V(G)$  moči  $|S| = k$ , za katero velja, da ima

$$G - S$$

vsaj  $k + 1$  povezanih komponent. Potem  $G$  ni Hamiltonov.

*Komentar:* Pogoj, da v grafu takšna množica  $S$  **ne** obstaja, je *potreben*. To pomeni, da Hamiltonov graf zadošča temu pogoju (tj. ne razpade preveč). Toda če graf pogoju zadošča (ne razpade), to še ne pomeni, da je Hamiltonov.

Zgledi



## Razpad v dvodelnih grafih

Potrebni pogoj z razpadom grafa ima v družini dvodelnih grafov naslednjo posledico.

### Posledica

*Naj bo  $G$  dvodelen graf z barvnima razredoma  $V_1$  in  $V_2$ .*

*( $V(G) = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1$  je množica 'belih',  $V_2$  množica 'črnih' točk.)*

*Če je  $|V_1| \neq |V_2|$ , potem  $G$  ni Hamiltonov.*

## Diracov zadostni pogoj

### Izrek (Bondy in Chvátal)

*Naj bosta  $u$  in  $v$  nesosedni v grafu  $G$  in naj zanju velja  $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$ .  
Potem je graf  $G + uv$  Hamiltonov natanko tedaj, ko je  $G$  Hamiltonov.*



## Diracov zadostni pogoj

### Izrek (Dirac)

Naj bo  $G$  graf z vsaj tremi točkami ( $|V(G)| = n \geq 3$ ).

Če za vsako točko

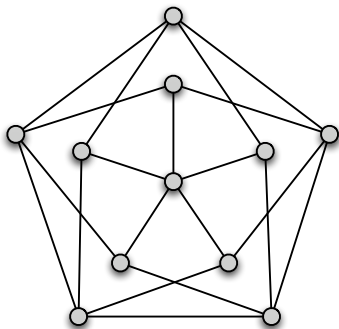
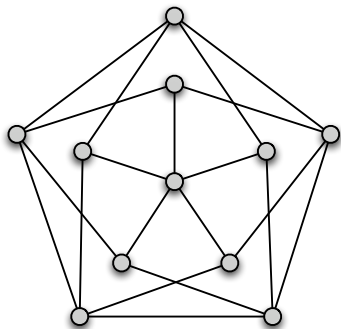
$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

potem je graf  $G$  Hamiltonov.

*Komentar:* Pogoj je zadosten. To pomeni, da je vsak graf, ki izpolni omenjeni pogoj tudi Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil zgornji pogoj.

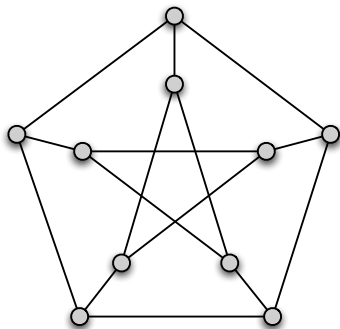
# Grötzschev graf

Ali je Hamiltonov?



## Petersenov graf

Ali je Hamiltonov?



## Barvanje grafov

*k*-barvanje točk grafa  $G$  je preslikava

$$c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\},$$

za katero velja, da je  $c(u) \neq c(v)$  za vsako povezavo  $uv \in E(G)$ .

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave **različnih barv**.

Najmanjše naravno število  $k$ , za katerega obstaja  $k$ -barvanje točk grafa  $G$ , imenujemo **kromatično število grafa  $G$**  in ga označimo s  $\chi(G)$ .

## Zakaj barvanje točk grafa

*Problem:* Skladiščimo nevarne kemikalije  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ .

Predpisi določajo, da določenih nevarnih snov ne smemo skladiščiti skupaj. Poišči najmanjše potrebno število skladiščnih prostorov.

*Rešitev:*

- ▶ Sestavimo graf  $G$  s točkami  $k_1, \dots, k_n$ .
- ▶ Dve točki-kemikaliji sta *sosedi*, če ju ne smemo hraniti v istem prostoru.
- ▶ Barve ustrezajo skladiščnim prostorom.
- ▶ Iščemo najmanjše potrebno število barv.

## Zgledi

1.  $\chi(G) \leq |V(G)|$
2.  $\chi(G) \leq 1$  natanko tedaj, ko je  $G$  brez povezav.
3.  $\chi(G) \leq 2$  natanko tedaj, ko je  $G$  dvodelen.
4.  $\chi(K_n) = n$ ,  $\chi(\overline{K_n}) = 1$ ,  $\chi(K_{m,n}) = 2$
5.  $\chi(T) = 2$ , če je  $T$  drevo in ima vsaj dve točki.
6.  $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ sod,} \\ 3, & n \text{ lih.} \end{cases}$
7.  $\chi(Q_d) = 2$ , če je  $d \geq 1$ .

## Zgornja in spodnja meja za $\chi(G)$

$\omega(G)$  je velikost največjega *polnega podgrafa* (tudi *klike*) v  $G$ .

$\omega(G) \leq 2$  velja natanko tedaj, ko je  $G$  *brez trikotnikov*.

$\Delta(G)$  označuje *največjo stopnjo* točke v grafu  $G$ ,  
z  $\delta(G)$  pa označimo *najmanjšo stopnjo* točke grafa  $G$ .

### Izrek

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Velja celo boljši rezultat.

### Izrek (Brooks)

Naj bo  $G$  povezan graf. Če  $G$  ni *lih cikel* niti *poln graf*, potem je

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

## Požrešno barvanje

požrešnoPobarvaj( $G$ )

če ima  $G$  eno samo točko  $v$ , jo obarvaj z barvo 1,

**sicer**

izberi točko  $v$ ,

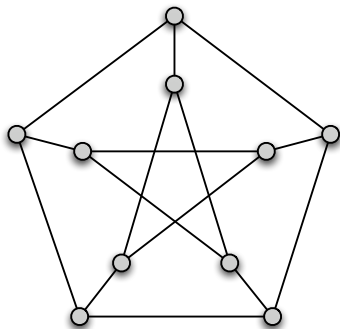
požrešnoPobarvaj( $G - v$ ),

obarvaj točko  $v$  z najmanjšo barvo, ki je ne uporabijo sosede točke  $v$ .



## Petersenov graf

Kolikšno je njegovo kromatično število?



## Grötzschev graf

Kolikšno je njegovo kromatično število?

