Diskretne Strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

27. december 2022

Barvanje grafov

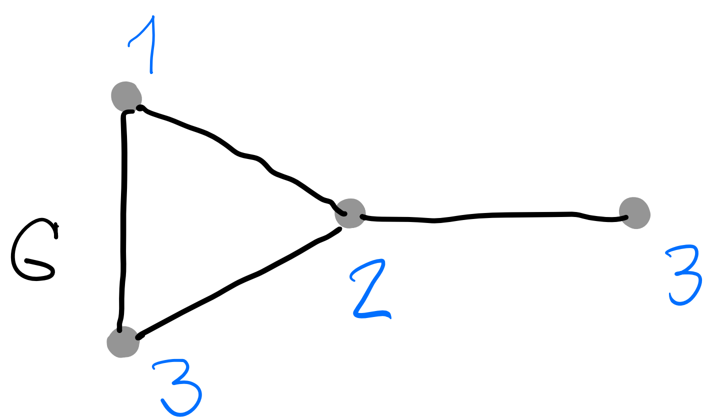
k-barvanje točk grafa G je preslikava

$$c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\},$$

za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih *barv*.

Najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje točk grafa G, imenujemo *kromatično število grafa G* in ga označimo s $\chi(G)$.



$\chi(G) = 3$

Zakaj barvanje točk grafa

Problem: Skladiščimo nevarne kemikalije $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$.

Predpisi določajo, da določenih nevarnih snov ne smemo skladiščiti skupaj. Poišči najmanjše potrebno število skladiščnih prostorov.

Rešitev:

- Sestavimo graf G s točkami $k_1, \ldots, k_n$.
- Dve točki-kemikaliji sta *sosedi*, če ju ne smemo hraniti v istem prostoru.
- Barve ustrezajo skladiščnim prostorom.
- Iščemo najmanjše potrebno število barv.

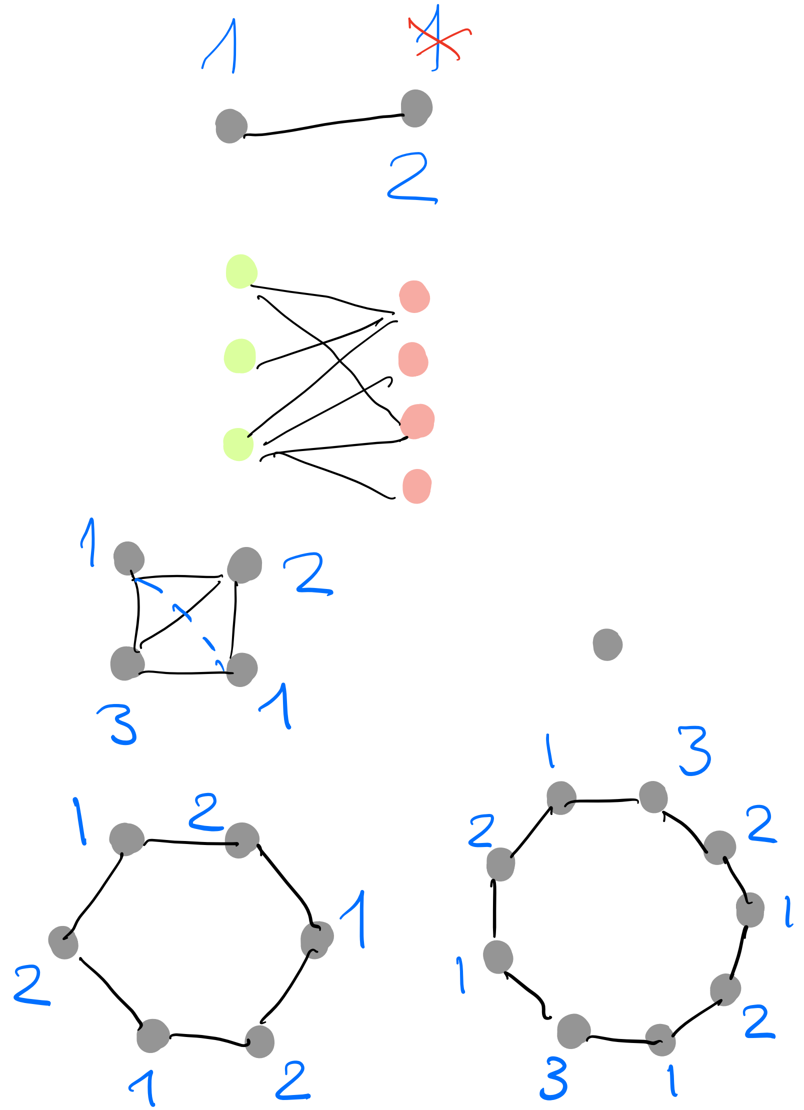
Zgledi

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$
2. $\chi(G) \leq 1$ natanko tedaj, ko je G brez povezav.
3. $\chi(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je G dvodelen.
4. $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$, $\chi(K_{m,n}) = 2$
5. $\chi(T) = 2$, če je T drevo in ima vsaj dve točki.
6. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ sod}, \\ 3, & n \text{ lih}. \end{cases}$
7. $\chi(Q_d) = 2$, če je $d \geq 1$.

1011011 LIHA TOČKA

1111011 SODA TOČKA

enic v zapisu / imenu točke



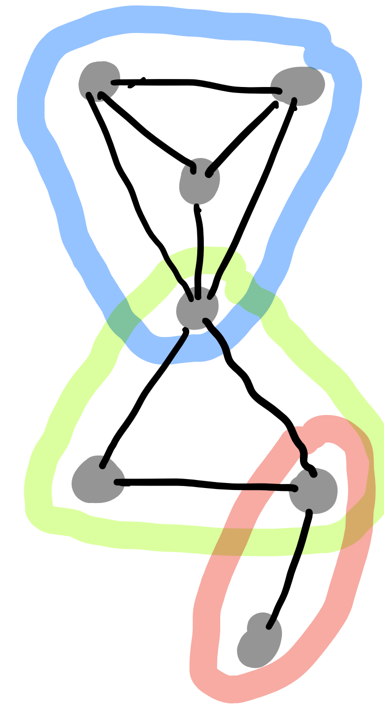
Zgornja in spodnja meja za $\chi(G)$

$\omega(G)$ je velikost največjega *polnega podgrafa* (tudi *klike*) v G.

$\omega(G) \leq 2$ velja natanko tedaj, ko je G *brez trikotnikov*.

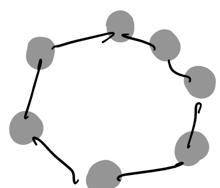
$\Delta(G)$ označuje *največjo stopnjo* točke v grafu G,
z $\delta(G)$ pa označimo *najmanjšo stopnjo* točke grafa G.

Izrek
$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$



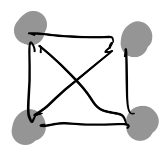
$\omega(G) = 4$
$\delta(G) = 1$
$\Delta(G) = 5$

$\chi(C_{2k+1}) = 3$



$\Delta(C_{2k+1}) + 1 = 3$

$\chi(K_n) = n$



$\Delta(K_n) + 1 = n$

$4 \leq \chi(G) \leq 6$

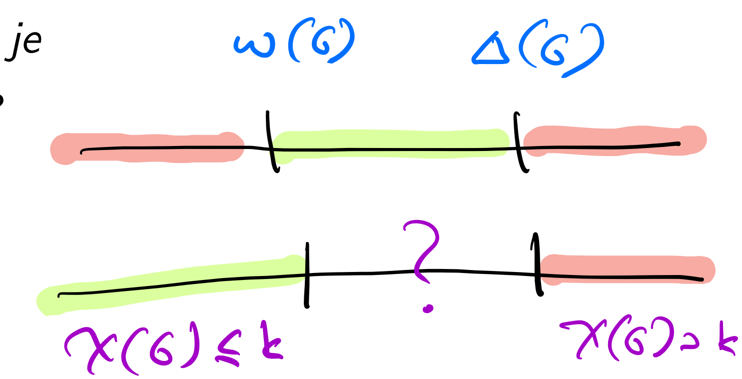
Velja celo boljši rezultat.

Izrek (Brooks)
Naj bo G povezan graf. Če G ni lih cikel niti poln graf, potem je
$\chi(G) \leq \Delta(G)$

brez dokaza

$G \quad \chi(G) = ?$

$k \geq 3 \quad \chi(G) \leq k$
$\chi(G) > k$



Požrešno barvanje

`požrešnoPobarvaj`(G)

če ima G eno samo točko v, jo obarvaj z barvo 1,

sicer

  izberi točko v,

  `požrešnoPobarvaj`$(G - v)$,

  obarvaj točko v z najmanjšo barvo, ki je ne uporabijo sosede točke v.

točke oštevilči in jih barvaj po vrsti po oznakah

Ko barvam točko v

\# uporabljenih barv na sosedah $\leq$

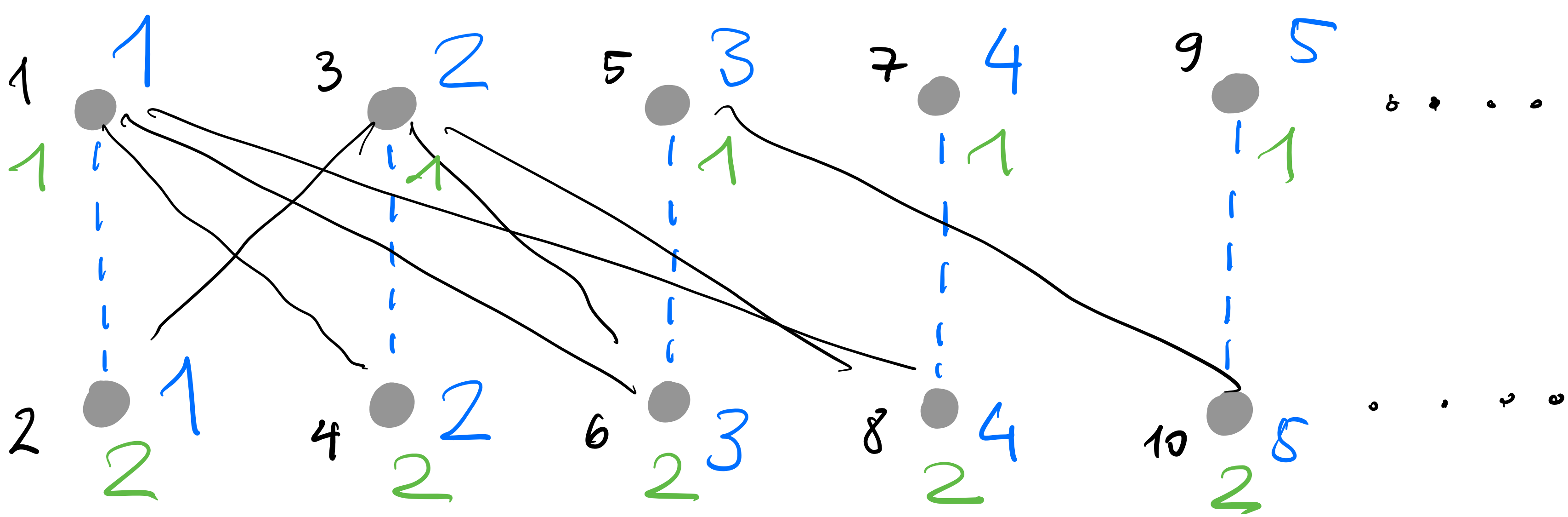
\# obarvanih sosed $\leq$

$\deg(v) \leq$

$\Delta(G)$

najmanj ena je neuporabljena

$1 \quad 2 \quad \ldots\ldots \quad \Delta(G) \quad \Delta(G)+1$



Požrešno barvanje ← še vedno ne morem pričakovati opt. rezultata.

`požrešnoPobarvaj (G)`

če ima G eno samo točko v, jo obarvaj z barvo 1,

sicer

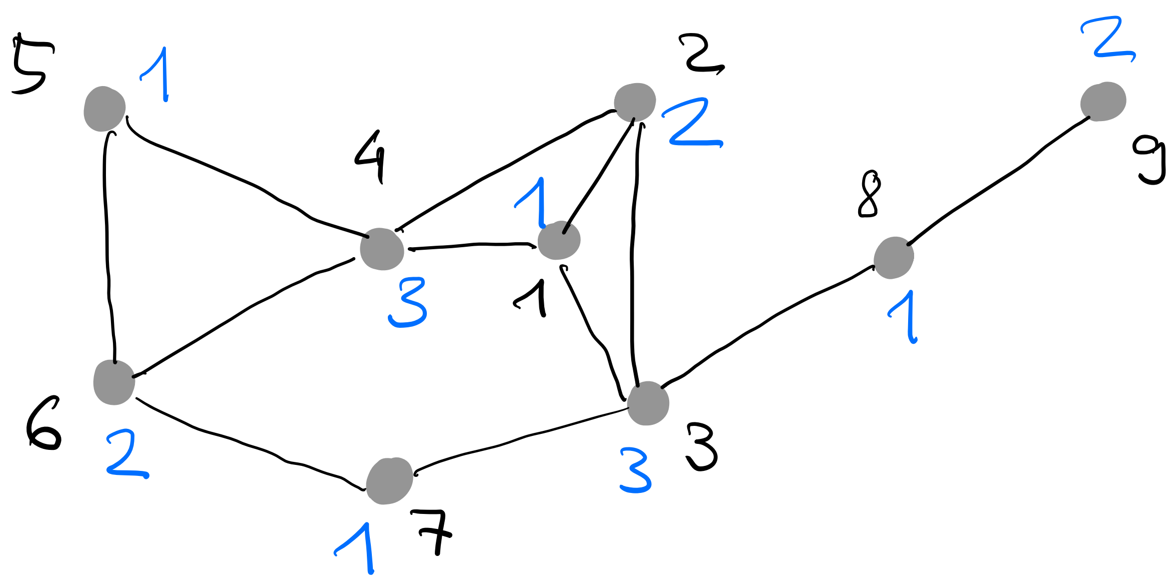
izberi točko v najmanjše stopnje v G

`požrešnoPobarvaj`$(G - v)$,

obarvaj točko v z najmanjšo barvo, ki je ne uporabijo sosede točke v.

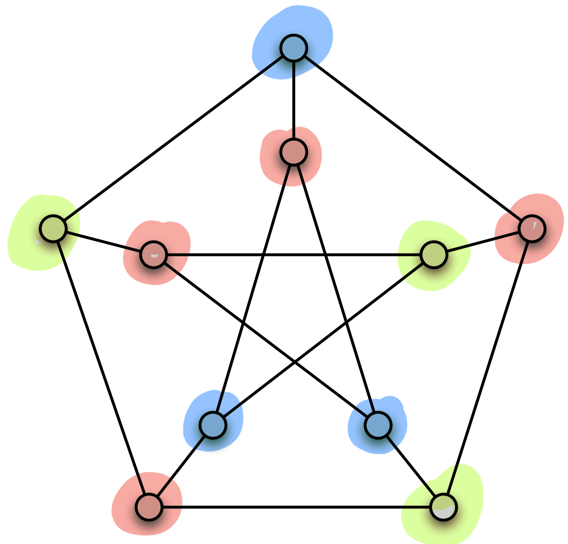
Pazi na vrstni red točk.

Na koncu barvam točke majhnih stopenj.
Na začetku točke velikih stopenj.

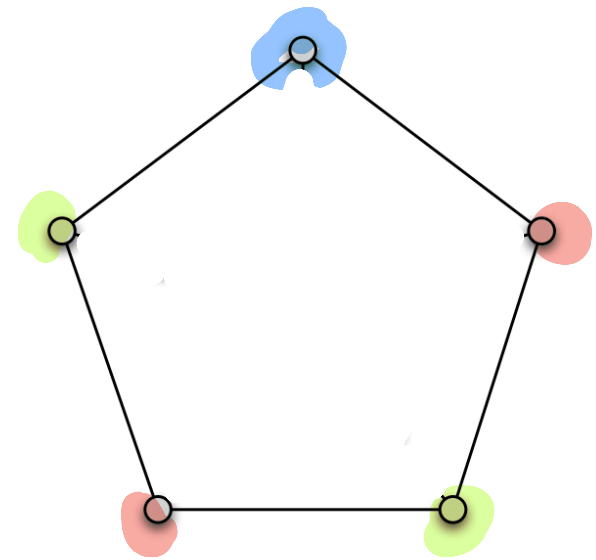


Petersenov graf

Kolikšno je njegovo kromatično število?



"Evo samo" 3-barvanje



$$2 \le \chi(P) \le \Delta(P) = 3$$

$\chi(P) \neq 2$ ← ni dvodelen

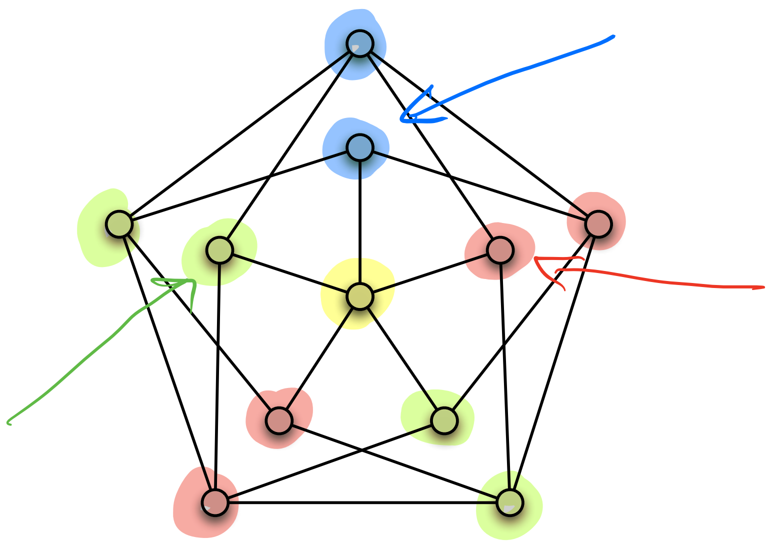
$\chi(P) = 3$

Kako izgledajo barvanja s 3 barvami v 5-ciklu.

- vse tri barve moram uporabiti
- ena barva uporabljena samo enkrat (modra)
- rdeča in zelena dvakrat

Grötzschev graf

Kolikšno je njegovo kromatično število?



$$2 = \omega(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) = 5$$

$$\chi(G) \ne 2$$

$$3 \le \chi(G) \le 5$$

Katera možnost je prava?

Poskusimo poiskati 3-barvanje,

Ne gre!

$$\chi(G) > 3$$

Uspemo pa s 4 barvami.

$$\chi(G) = 4$$