Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

17. oktober 2022

Sklepanje v izjavnem računu

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

Ali je ta sklep pravilen?

Formalizacija

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

1. $k \vee \neg p$
2. $p \Rightarrow j$
3. $\neg k$

---

4. $\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

in beremo:
Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridelamo:

$$\begin{array}{rcl} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg k & \sim & 1 \qquad \text{in} \\ \neg j & \sim & 0 \end{array}$$

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.

Pravilen sklep

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko je izraz $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ tavtologija.

Zgled 0

Predpostavki:	1.	*Če dežuje je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

dežuje	...	*d*
oblačno je	...	*o*

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov $C_1, C_2, \ldots, C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od predpostavk ali
(b) C_i je tavtologija ali
(c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali
(d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled pravilnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(5,6)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)

Zgled pravilnega sklepa, še en

Ali iz predpostavk $p \vee \neg q, \neg q \Rightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r$ sledi $p \wedge r$?

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Zgled 3

Predpostavke:	1.	*Šel bom v kino, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti na tekmo.*

grem na tekmo	...	t
grem v kino	...	k
naredim domačo nalogo	...	d

Zgled 4

Ali iz predpostavk $p, \neg p$ sledi q?

Zgled 5

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

Pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B \Rightarrow C$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B \models C.$

Zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)

Napačen zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	$\quad p$	predpostavka PS
3.2.	$\quad q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	$\quad q$	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)
4.	q	DS(2,3.2)

Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.

Po zaključku pogojnega sklepa ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.

Sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0.$

Zgled

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

Analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$ *in*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C$.