Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

17. oktober 2022

Sklepanje v izjavnem računu

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

Ali je ta sklep pravilen?

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

1.	$k \vee \neg p$
2.	$p \Rightarrow j$
3.	$\neg k$
4.	$\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

in beremo:
Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

p q r	A_1, A_2, A_3, ..., A_n	B
0 0 0		
0 0 1		
⋮	1 1 1 ... 1	
⋮	1 1 1 ... 1	0
1 1 1		

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridelamo:

$$\begin{array}{rcc} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg k & \sim & 1 \quad \text{in} \\ \neg j & \sim & 0 \end{array}$$

protiprimer

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.

krokodil, želva, kljunaš

Nepravilen sklep, če en zgled

$$\underbrace{(\underbrace{\overset{1}{p} \Rightarrow \overset{0}{q}}_{0}) \Rightarrow (\underbrace{\overset{1}{r} \Rightarrow \overset{0}{s}}_{0})}_{1},\ \underbrace{\neg\underbrace{(\overset{1}{r} \Rightarrow \overset{0}{q})}_{0}}_{1} \ \overset{?}{\models}\ \overset{0}{s}$$

Poiščimo protiprimer.

p	1
q	0
r	1
s	0

Pravilen sklep

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko je izraz $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ tavtologija.

Dokaz

B je resničen "vedno", ko so resnične vse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ....

B je resničen "vedno", ko je resnična $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ ...

Implikacija $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ je "vedno" resnična ....

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ je tavtologija $\square$

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Zgled 0

Predpostavki:	1.	*Če dežuje, je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

$$\frac{\begin{array}{c} d \Rightarrow o \\ d \end{array}}{o}$$

dežuje . . . d
oblačno je . . . o

d	o	$d \Rightarrow o$	d	o
0	0	1	0	?
0	1	1	0	?
1	0	0	1	?
1	1	1	1	1

✓✓

Sklep je pravilen.

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$ (MT)

$\neg B \Rightarrow \neg A, \neg B \models \neg A$ MP

$\neg A \vee B, \neg B \models \neg A$ DS

$A, B \models A \wedge B$

Združitev (ZD)

A	B	$A \wedge B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	1

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$ *hipotetični silogizem* (HS)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	1

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov $C_1, C_2, \ldots, C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od predpostavk ali
(b) C_i je tavtologija ali
(c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali
(d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

$C_1, C_2, C_3, \ldots$

C_1
C_2
C_3
C_4
$\vdots$

$C_m = B$

Zgled pravilnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(5,6)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)

C_1
C_2
C_3
C_4
$\vdots$

t

Sklep je pravilen!
To je dokaz.

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$ *hipotetični silogizem* (HS)

Zgled pravilnega sklepa, še en

Ali iz predpostavk $p \vee \neg q, \neg q \Rightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r$ sledi $p \wedge r$?

1.	$p \vee \neg q$	pred.
2.	$\neg q \Rightarrow r \wedge s$	pred.
3.	$\neg s \wedge r$	pred.
4.	r	Po (3)
5.	$\neg s$	Po (3)
6.	$\neg r \vee \neg s$	Pr (5)
7.	$\neg (r \wedge s)$	$\sim$ 6.
8.	q	MT (2, 7)
9.	p	DS (1, 8)
10	$p \wedge r$	Zd (4, 9)

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B \sim B \vee A$	*pridružitev* (Pr)

6. $\neg t \vee \neg s$ Pr (5)

6. $\neg q \vee \neg s$ Pr (5)

Da, sklep je pravilen.

Zgled 3

Predpostavke:	1.	*Šel bom v kino, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti na tekmo.*

grem na tekmo	...	t
grem v kino	...	k
naredim domačo nalogo	...	d

$\neg t$ zaključek

1. $k \wedge d$ pred.
2. $t \wedge k \Rightarrow \neg d$ pred.
3. d Po(1)
4. $\neg(t \wedge k)$ MT(2,3)
5. $\neg t \vee \neg k$ ~ 4.
6. k Po(1)
7. $\neg t$ DS(5,6)

Sklep je pravilen.

Zgled 4

Ali iz predpostavk $p, \neg p$ sledi q?

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

1. p pred.
2. $\neg p$ pred.
3. $p \wedge \neg p$ Zd(1,2)
4. 0 ~3.
5. $0 \vee q$ Pr(4)
6. q ~5.

1. $1 = 3$ pred.
2. $1 \neq 2$ pred.
3. $0 = 2$ -1 (na 1)
4. $0 = 12$ $\cdot 6$ (na 3)
5. $5 = 17$ $+5$ (na 4)

Zaključek $5 = 17$

Zgled 5

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

Poskus 2

1. $p \Rightarrow q \vee r$ pred.
2. $\neg r$ pred.
3. $(p \Rightarrow q \vee r) \wedge \neg r$ Zd(1,3)

$\vdots$

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Poskus 1.

1. $p \Rightarrow q \vee r$ pred.
2. $\neg r$ pred.
3. ~~$p \Rightarrow q$ DS(1,2)~~

PRAVILNO

Ž $p \Rightarrow q \vee r \sim p \Rightarrow (q \vee r)$

Pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B \Rightarrow C$ *natanko tedaj, ko*

$$A_1, A_2, \dots, A_k, B \models C.$$

$\mathcal{A} \models B \Rightarrow C$

$\mathcal{A}, B \models C$

Dokaz:

$$\mathcal{A} \ \text{-----}\ A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$$

Dovolj je pokazati, da je

$\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ tavtologija natanko tedaj, ko je

$(\mathcal{A} \wedge B) \Rightarrow C$ tavtologija

Pokazali bomo celo, da sta izraza enakovredna.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C) &\sim \neg\mathcal{A} \vee (\neg B \vee C) \\
&\sim (\neg\mathcal{A} \vee \neg B) \vee C \\
&\sim \neg(\mathcal{A} \wedge B) \vee C \\
&\sim (\mathcal{A} \wedge B) \Rightarrow C
\end{aligned}$$

∎

Zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)

$p \Rightarrow q \vee r, \neg r, \underline{p} \vdash q$

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

1. $p \Rightarrow q \vee r$ pred
2. $\neg r$ pred.
3. p pred.
4. $q \vee r$ MP(1,3)
5. q DS(2,4)

POGOJNI SKLEP

UPORABIMO STRUKTURNO

Napačen zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)
4.	q	DS(2,3.2)

Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.

Po zaključku pogojnega sklepa ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.

v tem trenutku vrstice 3.2 nimamo več na voljo.

pomožni račun

Sklep s protislovjem

Reductio ad absurdum

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

$A, \neg B \models 0$

$A \models B$

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ *natanko tedaj, ko*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0.$$

Dokaz. $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$

Dovolj je pokazati, da je $A \Rightarrow B$ tavtologija natanko tedaj, ko je $A \wedge \neg B \Rightarrow 0$ tavtologija.

$$\begin{aligned}
A \wedge \neg B \Rightarrow 0 &\sim \neg(A \wedge \neg B) \cancel{\vee 0} \\
&\sim \neg(A \wedge \neg B) \\
&\sim \neg A \vee B \\
&\sim A \Rightarrow B
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Zgled

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

1.	$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$	pred.
2.	$s \wedge q \Rightarrow r$	pred.
3.	s	pred.
4.1.	$\neg\neg p$	pred RA
4.2.	p	~ 4.1
4.3.	$\neg(q \Rightarrow r)$	MP(4.2, 1)
4.4.	$q \wedge \neg r$	~ 4.3
4.5	q	Po(4.4)
4.6.	$\neg r$	Po(4.4)
4.7.	$s \wedge q$	Zd(3, 4.5)
4.8.	r	MP(4.7, 2)
4.9.	$r \wedge \neg r$	Zd(4.6, 4.8)
4.10	0	~ 4.9
4.	$\neg p$	RA(4.1, 4.10)

Poskusimo poiskati protiprimer

$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r) \sim 1$

$s \wedge q \Rightarrow r \sim 1$

$s \sim 1$

$p \sim 1$

$\neg(q \Rightarrow r) \sim 1$

$q \sim 1$

$r \sim 0$

$s \wedge q \sim 1$

$r \sim 1$

Protiprimera ni, saj bi moral biti r tako resničen kot lažen.

Analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$ *in*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C.$

Ali se vedno disjunkcija pojavi med predpostavkami?

$1 \leftarrow$ lahko vedno dodamo med predpostavke

$p \vee \neg p \leftarrow$ tavtologijo lahko prepišemo takole

Zaključek C je potrebno izpeljati iz $A_1 \ldots A_k$ v primeru, ko je p resničen IN TUDI v primeru, ko je p lažen.