

Diskretne strukture UNI

Vaje, 2. teden

1. Določi ali je izraz tautologija, protislovje oz. nevtralen.

(a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \sim p \Leftrightarrow q$

P	Q	P ∨ Q	P ∧ Q	P ⇒ Q
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

neutrality izraz

n spremenljivke → 2ⁿ vrstic

možnosti ¬ ∧ ∨ ⇒ ⇔ šifruješi

P	Q	P ⇒ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(b) $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(q \Rightarrow p) \sim 1$

P	Q	¬P ∧ Q	¬(Q ⇒ P)	1
0	0	1 0	1 0	1
0	1	1 1	1 1	0
1	0	0 0	1 0	1
1	1	0 0	1 0	1

tautologija

P	¬P
0	1
1	0

(c) $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$

(d) $\neg(p \Rightarrow (\neg p \vee q)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

(e) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q))$

(f) $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg(r \wedge q)) \sim 1$

P	Q	R	P ∧ Q ∧ R	¬(P ⇒ ¬(R ∧ Q))
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

tautologija

1. 6. 5. 4. 3. 2.

$$(g) \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \vee (\neg r \Rightarrow p)$$

P	q	r	$\neg(p \wedge q)$	$(r \Rightarrow q) \vee (\neg r \Rightarrow p)$
0	0	0	1 0	1 1 1 0
0	0	1	1 0	0 1 0 1
0	1	0	1 0	1 1 1 0
0	1	1	1 0	1 1 0 1
1	0	0	1 0	1 1 1 1
1	0	1	1 0	0 1 0 1
1	1	0	0 1	1 1 1 1
1	1	1	0 1	1 1 0 1

2. 1.
7.
3.
6.
4.
5.

P	q	$P \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

neutralni izraz

2. Za osnovne izjave p, q, r določi logične vrednosti. Določi še logične vrednosti za sestavljene izraze A, B, C .

p : Negacija tautologije je nevtralen izraz. ~ 0

q : Konjunkcija tautologije in nevtralnega izraza je nevtralen izraz. ~ 1

r : Disjunkcija tautologije in nevtralnega izraza je nevtralen izraz. ~ 0

s : Če je I_1 protislovje in I_2 nevtralen izraz, potem je $I_1 \Rightarrow I_2$ tautologija. ~ 1

$$A: p \vee q \wedge r \vee \neg s$$

$$B: p \Leftrightarrow q \vee r \Rightarrow s$$

$$C: (r \Rightarrow \neg q) \vee \neg(\neg r \Rightarrow q)$$

$$\begin{aligned} T \wedge N &\sim N \checkmark \\ 1 \wedge 0 &\sim 0 \\ 1 \wedge 1 &\sim 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \vee N &\sim N // \\ 1 \vee 0 &\sim 1 // \\ 1 \vee 1 &\sim 1 \\ T \vee N &\sim T \end{aligned}$$

$$I_1 = P$$

$$I_2 = N$$

$$I_1 \Rightarrow I_2 \sim P \Rightarrow N \sim$$

$$\sim 0 \Rightarrow N \sim 1 \sim T \checkmark$$

$$A = p \vee q \wedge r \vee \neg s \sim 0 \vee 1 \wedge 0 \vee (\underbrace{1}_0) \sim 0 \vee (\underbrace{1 \wedge 0}_0) \vee 0 \sim 0 \vee 0 \vee 0 \sim$$

$$\underline{\underline{\sim 0}}$$

$$B \sim 0 \Leftrightarrow (\underbrace{1 \vee 0}_1) \Rightarrow 1 \sim 0 \Leftrightarrow (\underbrace{1 \Rightarrow 1}_1) \sim 0 \Leftrightarrow 1 \sim \underline{\underline{0}}$$

$$C \sim (0 \Rightarrow (\underbrace{1}_0)) \vee \neg(\underbrace{1}_1 \Rightarrow 1) \sim (0 \Rightarrow 0) \vee \neg(\underbrace{1 \Rightarrow 1}_1) \sim 1 \vee (\underbrace{1}_1) \sim 1 \vee 0 \sim \underline{\underline{1}}$$

0	⊥	false
1	T	true

3. O študentih Petru, Roku in Simonu vemo naslednje

A: Če Peter ali pa Rok študirata računalništvo, potem Simon ne študira računalništva.

B: Če Peter ali pa Simon ne študirata računalništva, potem Rok študira računalništvo.

C: Peter in Rok ali oba študirata računalništvo, ali pa nobeden ne študira računalništva.

Zgornje izjave zapiši z osnovnimi izjavami

p : Peter študira računalništvo.

$$A = p \vee r \Rightarrow \neg s$$

r : Rok študira računalništvo.

$$B = \neg p \vee \neg s \Rightarrow r \sim \underline{\neg(p \wedge s)} \Rightarrow r$$

s : Simon študira računalništvo.

$$C = p \Leftrightarrow r$$

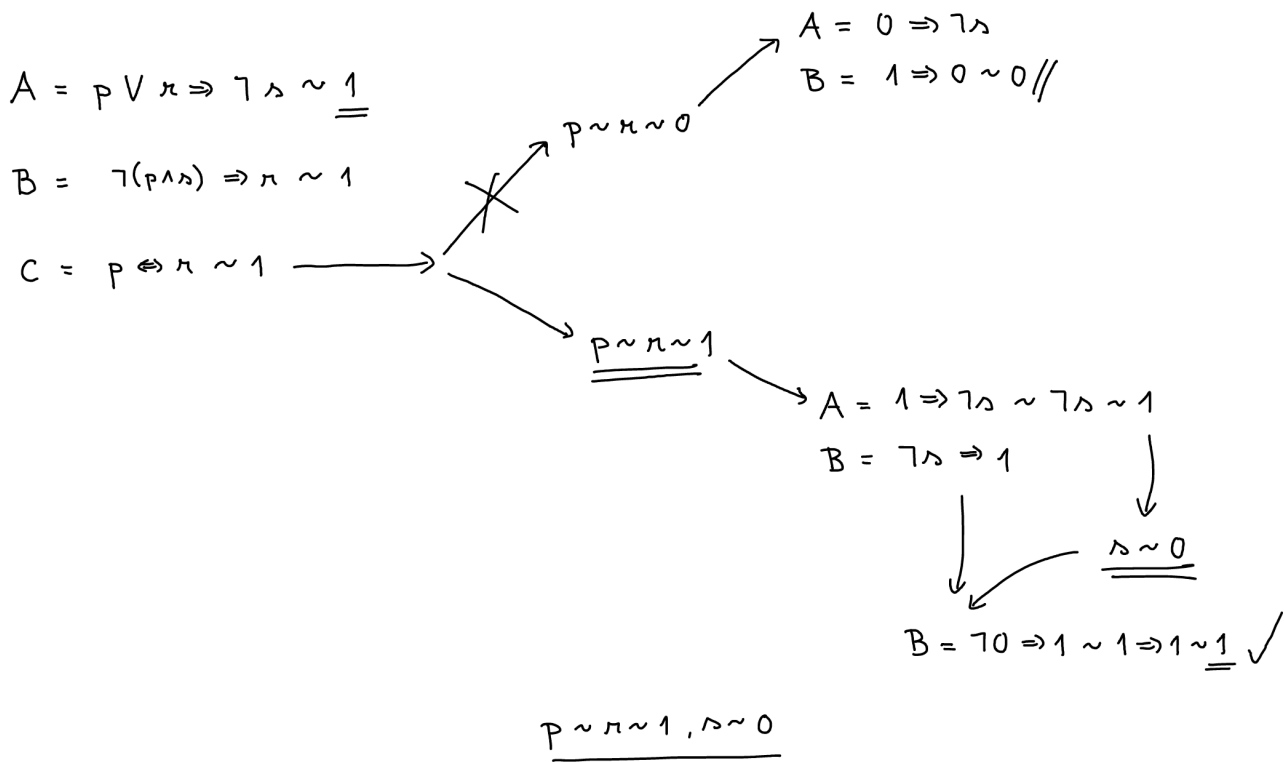
in povej, kdo študira računalništvo.

p	r	s	A			B			C
			$p \vee r \Rightarrow \neg s$	$\neg(p \wedge s) \Rightarrow r$		$\neg(p \wedge s) \Rightarrow r$		$p \Leftrightarrow r$	
0	0	0	0	1	1	1	0	0 //	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0 //	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0 //
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0 //
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0 //
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0 //
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

$p \Leftrightarrow r \sim (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$
 $\neg p \vee \neg s \sim \neg(p \wedge s)$
 $\neg(p \vee s) ???$

← edina rešitev: $p \sim r \sim 1$
 $s \sim 0$

Peter in Rok študirata računalništvo,
 Simon pa ne.



$1 \wedge p \sim p$
 $1 \Rightarrow p \sim p$

4. Natanko ena od skrinj z oznakami A, B, C in D vsebuje zlato in natanko ena od spodnjih izjav je pravilna. V kateri skrinji je zlato?

A: Zlato je tu. $A = \underline{a}$	B: Zlato je v A ali D. $B = \underline{a \vee d}$	C: Zlata ni tu. $C = \underline{\neg c}$	D: Zlato je tu. $D = \underline{d}$
--	--	---	--

$a =$ Zlato je v skrinji A.
 $b =$ -||- B.
 $c =$ -||- C.
 $d =$ -||- D.

} 4 spremenljivke \Rightarrow 16 vrstic?

a	b	c	d	a	a ∨ d	¬c	d	
1	0	0	0	1	1	1	0	3 enice //
0	1	0	0	0	0	1	0	✓ →
0	0	1	0	0	0	0	0	0 enic //
0	0	0	1	0	1	1	1	3 enice //

matanko ena izjava pravilna

$a \sim c \sim d \sim 0$ $b \sim 1$ Zlato je v skrinji B.

A: Zlato je tu. $A = \underline{a}$	B: Zlato je v A ali D. $B = \underline{a \vee d}$	C: Zlata ni tu. $C = \underline{\neg c}$	D: Zlato je tu. $D = \underline{d}$
--	--	---	--

- matanko 1 pravilna izjava *
- v matanko 1 skrinji zlato

Če bi bili izjavi na A ali D resnični, potem bi bila resnična tudi B. To ne gre (*). Torej A in D sta obe napačni. Torej zlata ni niti v A niti v D. Torej je tudi izjava B napačna. Zato je izjava C res. Torej zlata ni v C. Zlato je lahko samo v B.

5. Na nekem otoku živijo samo vitezi in oprode. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo.

Srečaš tri prebivalce otoka, recimo jim A, B in C. Prebivalca A vprašaš, če je vitez ali oproda, vendar odgovor zamomlja in ga ne razumeš. Zato, logično, prebivalca B vprašaš, kaj je A rekel. "Rekel je, da je oproda," odgovori B. Nato se oglasi C in reče: "Ne verjemi mu, B laže." Kaj sta B in C? Kaj pa A?

A: ~~resnica~~

B: A je rekel, da je oproda.

C: B laže.

Če bi B govoril resnico, bi A trdil, da je oproda. Ampak oproda ne bo nikoli priznal, da je oproda, vitez pa ne tudi ne bo lagal, da je oproda. A ni trdil, da je oproda. B laže. C govori resnico.

B je oproda, C je vitez.

2. način

$a = A$ je vitez. $b = B$ je vitez. $c = C$ je vitez.

a	b	c	A	B	C
			nu	o	$\neg b$
0	0	0	?	o	1
0	0	1	?	o	1
0	1	0	?	o	0
0	1	1		o	0
1	0	0		o	1
1	0	1		o	1
1	1	0		o	0
1	1	1	?	o	0

A ne more izjaviti, da je oproda, torej B laže.
 $B \sim 0$

$b \sim 0, c \sim 1, a \sim ?$

6. Na nekem otoku živijo samo vitezi in oprode. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo.

Srečaš dva prebivalca otoka in eden od njiju reče: "Jaz sem oproda ali pa je on vitez." Kaj sta?

A: Jaz sem oproda ali pa je on vitez.

A: $\neg a \vee b$

$a = A$ je vitez.

B:

$b = B$ je vitez.

2. način

Recimo, da je A oproda. Potem je $\neg a \vee b \sim 1 \vee b \sim 1$, torej je A-jeva izjava res. Ampak oproda ne bi govoril resnice. Torej A ni oproda. A je vitez. Ker je $\neg a \vee b \sim 0 \vee b \sim b \sim 1$, je $b \sim 1$ in je B vitez. Torej oba sta viteza.

a	b	$\neg a \vee b$	
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1 ✓

1. 2.

Oba sta viteza.

7. Na nekem otoku živijo samo vitezi in oprode. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo.
Srečaš tri prebivalce otoka in eden od njih reče: "Vsi smo oprode." Drugi za trenutek pomisli in izjavi: "Natanko eden od nas je vitez." Kaj so?

A: Vsi smo oprode.

B: Natanko eden od nas je vitez.

C:

tabela

8. Na otok vitezov in oprod se je pretihotapil vohun, ki včasih laže, včasih pa ne. Policijski inšpektor Robinson je ujel vohuna v družbi oprode in viteza, vendar ni znal ugotoviti, kdo je kdo. Kot običajno mu je na pomoč priskočil slavni otoški detektiv Sheerluck Hoax. Dva od osumljencev sta ob prisotnosti velikega detektiva izjavila:

A: Nisem vohun.

B: Jaz sem vohun.

Sheerluck je nato tretjega, ki je bil v resnici vohun, vprašal: "Je B res vohun?". Kaj je vohun odgovoril, da se ni izdal?

9. Na nekem otoku živijo vitezi, oprode in vampirji. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo, vampirji pa podnevi lažejo in ponoči govorijo resnico. Nekoč v temni kripti ob neznanem času srečaš tri prebivalce, ki podajo naslednje izjave:

Ana: Jaz sem oproda.
Bine: Jaz sem vitez.
Cene: Jaz sem vampir.

Kaj veš o Cenetu? Ali lahko za vse tri ugotoviš, kaj so, če veš, da je med njimi natanko eden vsake vrste? Je dan ali noč?

10. Trije prebivalci otoka vitezov in oprod ti povedo naslednje:

Ana: Ali sva Bine in jaz različnih tipov ali pa sva Cene in jaz različnih tipov.
Bine: Število oprod je praštevilo.
Cene: Rad imam čokolado.

Ali ima Cene rad čokolado?