Numerične metode

izročki predavanj

Aljaž Zalar

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Verzija 03.10.2022

Literatura

Osnovna vira:

- Bojan Orel, Osnove numerične matematike, Založba FE in FRI.
- Bor Plestenjak: Razširjen uvod v numerične metode, DMFA založništvo.

Tuji viri:

- K. Atkinson, W. Han: Elementary Numerical Analysis, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
- R.L. Burden, J.D. Faires, A.M. Burden: Numerical Analysis, 10th edition, Cengage Learning, Boston, 2016.
- G.H. Golub, C.F. Van Loan: Matrix Computations, 3rd edition, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.
- D.R. Kincaid, E.W. Cheney: Numerical Analysis, Mathematics of Scientific Computing, 3rd edition, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2002.
- L.N. Trefethen, D. Bau: Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997.

Obveznosti

Potek predmeta:

- Predavanja: 3 ure na teden.
- Vaje: 2 uri na teden.

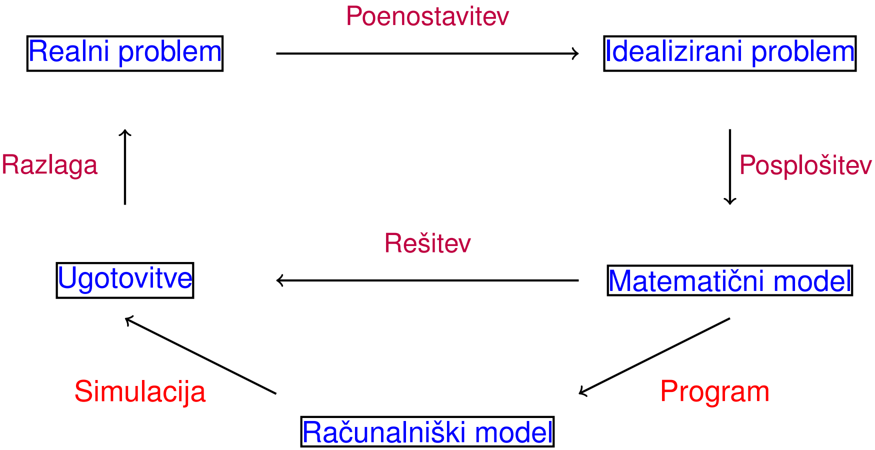
Ocena:

- 3 domače naloge.
- Pisni izpit.
- Ustni izpit.

Programska oprema:

- *Matlab*: Licenca dostopna za študente UL.
- *Octave*: Prosto dostopna alternativa Matlaba.

Vloga numerične matematike



Numerična matematika ima ključno vlogo pri pretvorbi matematičnega modela v računalniškega, reševanju tega modela in razlagi rešitev s stališča napak.

Vsebina predmeta

1. Računanje in vloga napak pri numerični matematiki
2. Reševanje sistemov linearnih enačb
   - Gausova eliminacija in LU razcep - cena in problemi
   - Pivotiranje
   - Iterativne metode - Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija
3. Reševanje (sistemov) nelinearnih enačb in optimizacija
   - Tangentna oz. Newtonova metoda
   - Metoda fiksne točke
   - Newtonova optimizacijska metoda
4. Aproksimacija in interpolacija
   - Lagrangeov in Newtonov interpolacijski polinom
   - Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov
   - QR razcep za predoločene sisteme

5. Numerično odvajanje in integriranje
    - Trapezna metoda
    - Simpsonova metoda
    - Rombergova metoda
6. Numerično reševanje diferencialnih enačb
    - Eulerjeva metoda
    - Runge-Kutta metode

Prvo poglavje:

Uvod v numerično računanje

- Numerično računanje
- Predstavljiva števila
- Zaokrožitvene napake
- Katastrofalno seštevanje/odštevanje
- Primeri (ne)stabilnega računanja

Numerično in simbolno računanje

Numerično računanje:

- Takoj v formulo vstavljamo števila
- Pridemo do numeričnega rezultata - numerične rešitve

Simbolno računanje:

- simboli predstavljajo števila
- izraz preoblikujemo s simbolnim račuanjem do novega simbolnega izraza - analitična rešitev

Primer

- *Numerično:*

$$\frac{(17.36)^2 - 1}{17.36 + 1} = 16.36; \quad 0.25,\ 0.33333\ldots(?),\ 3.14159\ldots(?)$$

- *Simbolno:*

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1; \quad \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \pi,\ \tan 83$$

Numerično in simbolno računanje

Primer

```
>> x=rand;(x^2-1)/(x+1)-(x-1)

ans=1.387778780781446e-17
```

Analitično bi rezultat moral biti 0, vendar zaradi numeričnih napak dobimo majhno napako.

Kaj zanima numerično matematiko?

Metoda. . . matematična konstrukcija, s katero rešujemo problem

Algoritem. . . koraki metode

Implementacija. . . zapis algoritma v izbranem jeziku

Kaj pomeni 'biti numerično dober'?

majhna sprememba podatkov $\Rightarrow$ majhna napaka rezultata

Tipična vprašanja numerične matematike:

- Ali je problem občutljiv?
- Ali je metoda 'dobra'?
- Ali je algoritem robusten - deluje na širokem spektru problemov?
- Ali je implementacija hitra - časovna in prostorska zahtevnost?

Občutljivih problemov NM ne more rešiti

Problem je občutljiv, če se ob majhni spremembi začetnih podatkov točen rezultat zelo spremeni.

Občutljivost je odvisna le od narave problema in ne od izbrane numerične metode.

Primer (presečišča premic)

Sistem in njegova perturbacija

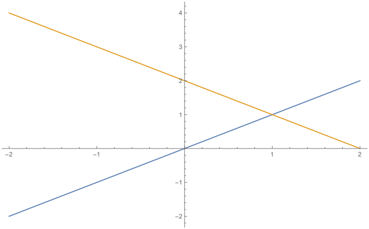
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \quad \rightarrow \quad x + y = 1.9999 \\ x - y &= 0 \quad \rightarrow \quad x - y = 0.0002 \end{aligned}$$

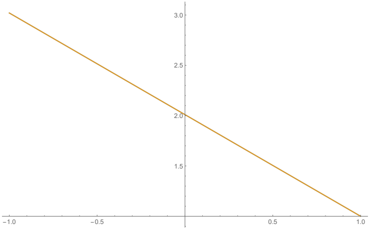
ima rešitvi $x = y = 1$ *oz.* $x = 1.00005$ *in* $y = 0.99985$. *Problem je neobčutljiv, saj je šlo za spremembo za isti velikostni razred.*

Sistem in njegova perturbacija

$$\begin{aligned} x + 0.99y &= 1.99 & \quad\rightarrow\quad & x + 0.99y = \color{red}{1.9899} \\ 0.99x + 0.98y &= 1.97 & \quad\rightarrow\quad & 0.99x + 0.98y = \color{red}{1.9701} \end{aligned}$$

ima rešitvi $x = y = 1$ oz. $x = 2.97$ in $y = -0.99$. Problem je občutljiv, saj je majhna sprememba začetnih podatkov povzročila veliko spremembo rezultata.





Na čem temeljijo numerične metode?

- Matrike nadomestimo z enostavnejšimi (upoštevamo samo diagonalni ali zgornjetrikotni del).
- Nelinearne probleme nadomestimo z linearnimi (linearna aproksimacija v točki).
- Neskončne procese nadomestimo s končnimi (uporabimo Taylorjev polinom) .
- Neskončno razsežne prostore nadomestimo s končno razsežnimi (funkcije nadomestimo s polinomi).
- Diferencialne enačbe nadomestimo z algebraičnimi (znebimo se vseh parcialnih odvodov iz enačb).

Zakaj sploh potrebujemo numerično matematiko?

Znanost, ki temelji na matematičnih izračunih, je neposredno odvisna od NM.

Nekatere katastrofe so se zgodile zaradi slabega numeričnega računanja (`http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/`):

- *Nesreča Misije Patriot, Zalivska vojna 1991, Savdska Arabija*, 28 žrtev: slaba analiza zaokrožitvenih napak.

  Čas zadetka iraške rakete, usmerjene na Savdsko Arabijo, je bil računan na vsako desetino sekunde v 24-bitnem sistemu. Ker velja

$$\frac{1}{10} = 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + 2^{-13} + 2^{-16} + 2^{-17} + 2^{-20} + 2^{-21} + \underbrace{+2^{-24} + 2^{-25} + 2^{-28} + \ldots}_{\text{zanemarimo}},$$

  je vsako desetinko sekunde napaka $9.5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$. Po 100 urah računanja je bila napaka $9.5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s} \cdot 100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 = 0.34\ \mathrm{s}$. Ker je hitrost rakete $1.676\ \mathrm{m/s}$, je bila pozicija rakete za več kot $500\ \mathrm{m}$ napačno predvidena in je ta ušla radarjem.

- *Eksplozija rakete Ariana 5, Francoska Gvajana, 1996*: posledica prekoračitve obsega števil.
  https://www.youtube.com/watch?v=PK_yguLapgA
  https://www.youtube.com/watch?v=W3YJeoYgozw

  Ob prenovi rakete so 'pozabili' nadgraditi uporabljen številski sistem, ki je horizontalno hitrost meril v 16-bitnem sistemu (1 bit porabimo za predznak). Največja hitrost v tem sistemu je

  $$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{13} + 2^{14} = \frac{2^{15}-1}{2-1} = 32767.$$

  Ker je prenovljena raketa po 37 sekundah presegla to hitrost, je prišlo do zaustavitve motorjev...

- *Potop naftne ploščadi Sleipner A, Stavanger, Norveška, 1991*, miljarda dolarjev škode: nenatančna obdelava obremenitev pri reševanju PDE-jev.
  https://www.youtube.com/watch?v=eGdiPs4THW8

Ponovitev predstavljivih števil

Števila shranjujemo v obliki

$$\boxed{x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_m \times \beta^e,}$$

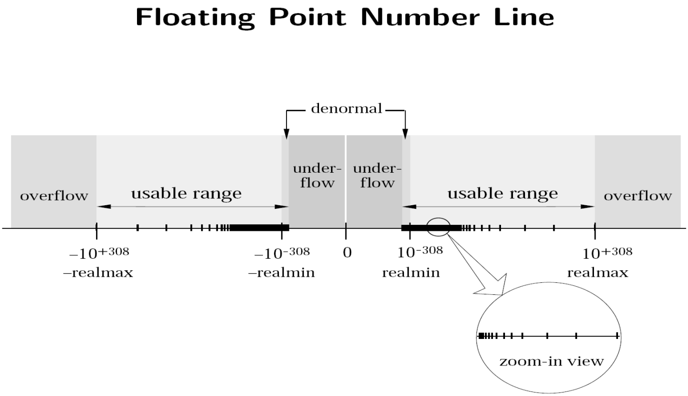
kjer je

- β naravno število (v računalništvu $\beta = 2$),
- $d_1 d_2 d_3 \dots d_m$ mantisa, e eksponent.

Primer (baza 10)

- *1000.12345 zapišemo kot* $+(0.100012345)_{10} \times 10^4$.
- *0.000812345 zapišemo kot* $+(0.812345)_{10} \times 10^{-3}$.

Prekoračitev in podkoračitev



- izračuni preblizu 0 lahko povzročijo podkoračitev
- preveliki izračuni lahko povzročijo prekoračitev
- prekoračitev je v splošnem hujši problem

Različne natančnosti

- *IEEE Enojna natančnost*: števila so predstavljena z 32 biti.
- *IEEE Dvojna natančnost*: števila so predstavljena z 64 biti.
- *Multiprecision Computing Toolbox for MATLAB*: Omogoča računanje v višjih natančnostih. Dostopno na naslovu `https://www.advanpix.com/`