1. Sistem enačb

$$
\begin{aligned}
x - y + z - w &= 1\\
x + y - z - w &= 3
\end{aligned}
$$

določa dvorazsežno ravnino v $\mathbb{R}^4$. Naj bo $T(0,-1,-1,2)$. Poiskati želimo tisto točko na ravnini, ki je najbližja točki T.

   (a) Zapiši matriko A in desno stran $\mathbf{b}$ zgornjega sistema.

   (b) Poišči A^+. (Račun se precej poenostavi, saj ima ta A poln rang.)

   (c) Z octave-om/Matlab-om se prepričaj, da je $P = I - A^+A$ ortogonalni projektor, tj. velja $P^2 = P$ in $P^\mathsf{T} = P$. Na kateri podprostor v $\mathbb{R}^4$ projicira?

   (d) S pomočjo A^+ najprej izrazi, nato pa še izračunaj rešitev te naloge.

   (e) Napiši funkcijo `pT = projekcija(A, b, T)`, ki vrne projekcijo točke T na hiperravnino v $\mathbb{R}^n$ določeno s poddoločenim sistemom $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. **Lastne vrednosti (simetričnih) matrik.** Recimo, da je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, za katere velja $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Napiši funkcijo v octave-u/Matlab-u, ki poišče po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor z naslednjo *potenčno iteracijo*:

   (0) Izberi neničeln $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

   (1) Izračunaj $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$.

   (2) Izračunaj $\mathbf{v} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ in ponovi (1).

   Iz iteracije izstopimo, ko postane $\mathbf{v}$ dovolj dober približek za lastni vektor. Pripadajoča lastna vrednost je potem $\lambda = \mathbf{v}^\mathsf{T} A\mathbf{v}$. (Zakaj?)

   Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sedaj simetrična matrika z lastnimi vrednostmi z zgornjo lastnostjo. Zgornjo potenčno iteracijo priredi v *simultano potenčno iteracijo* takole:

   (0) Izberi linearno neodvisne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, sestavi matriko $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$.

   (0') Poišči QR razcep matrike V; $V = QR$

   (1) Izračunaj $W = AQ$.

   (2) Poišči QR razcep matrike W in se vrni na (1).

   Iz iteracije izstopimo, ko postanejo stolpci matrike $Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m]$ dovolj dobri približki za lastne vektorje A. Pripadajoče lastne vrednosti spet dobimo iz $\lambda_k = \mathbf{q}_k^\mathsf{T} A\mathbf{q}_k$. Zakaj smo dodali zahtevo, da je A simetrična matrika?

   Obe metodi testiraj in primerjaj z vgrajenimi metodami na nekaj (razumno izbranih) primerih.