Diskretne strukture

Teorija grafov, izročki

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

13. december 2022

Primeri problemov za teorijo grafov

1. Ob začetku srečanja se je 9 prijateljev rokovalo z nekaterimi od preostalih prijateljev. Ali je možnost, da se je vsak rokoval natanko s 5 prijatelji?
2. Kako naj poštar optimalno razvozi pošto v nekem naselju, tako da po nobeni cesti ne bo rabil iti dvakrat, a bo obiskal vse hišne številke vzdolž vseh cest?
3. V učilnicah na izpitih študenti ne smejo sedeti drug poleg drugega. Nekateri stoli v učilnici so zlomljeni. Največ koliko študentov lahko v učilnici piše izpit?
4. V nekem mestu bi radi postavili avtobustna postajališča na točno določene točke. Ali lahko načrtujejo avtobusno liniji, ki začne in konča na neki točki in vsako od teh postajališč obišče natanko enkrat?
5. Kartografi bi zemljevid radi pobarvali z čim manj barvami tako, da bosta sosednji državi različnih barv. Koliko barv zadošča za ta namen? Ali je to število sploh omejeno za vse zemljevide?

Primeri problemov za teorijo grafov

1. Ob sestavljanju urnika za 5 predmetov $A_1, \dots, A_5$ imamo naslednje omejitve konflikte:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		X	X		
A_2	X				
A_3	X			X	X
A_4			X		X
A_5			X	X	

Koliko različnih časovnih terminov potrebujemo za izvedbo vseh petih predmetov brez konfliktov?

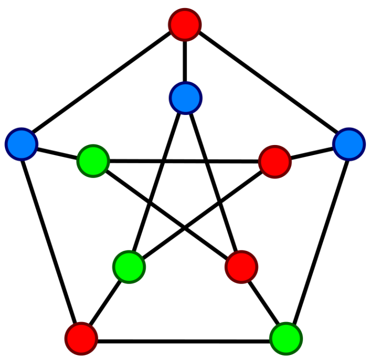
Kaj je graf

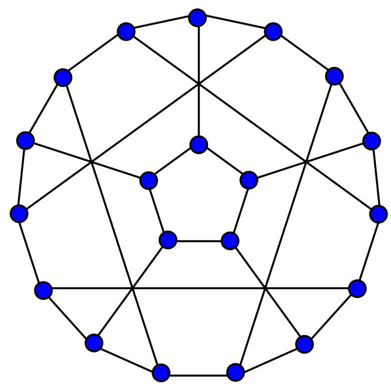
Neusmerjen graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

- V neprazna končna množica točk (vozlišč) grafa G in
- E množica povezav grafa G, pri čemer je vsaka povezava par točk .

Primer

$V = \{u, v, w, x, y\}$ $\quad E = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{v, x\}\}$





Kaj je graf

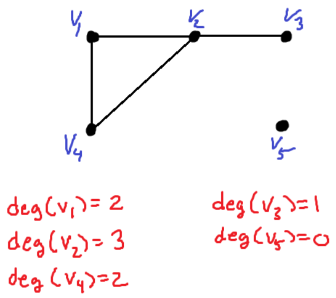
Namesto $e = \{u, v\}$ pišemo krajše $e = uv$ ali $e = vu$. V tem primeru pravimo, da sta točki u in v *krajišči* povezave e, povezava e povezuje točki u in v. Pravimo tudi, da sta u in v *sosednji*, kar označimo z $u \sim v$.

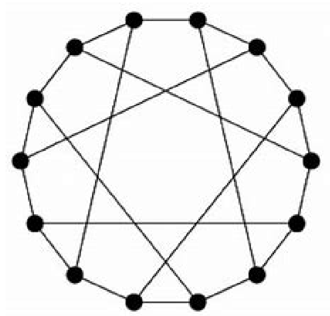
$V = V(G)$ . . . množica točk grafa G,
$E = E(G)$ . . . množica povezav grafa G

Stopnja točke $v \in V(G)$, $\deg(v)$, je število povezav, ki imajo v za krajišče.

Še nekaj definicij:

- Točka stopnje 0 je *izolirana*, točki stopnje 1 pravimo tudi *list*.
- Graf G je *regularen*, če imajo vse njegove točke isto stopnjo. 3-regularnim grafom pravimo tudi *kubični grafi*.





Lema o rokovanju in grafična zaporedja

Izrek (Lema o rokovanju)

Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Potem je

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m \tag{1}$$

Dokaz.

Ker vsaka povezava nastopi kot krajišče dveh vozlišč, je število povezav natanko $\frac{1}{2}$ vsote stopenj vseh vozlišč. $\square$

Posledica

V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.

Dokaz.

Če bi bilo točk lihe stopnje liho, bi bilo leva stran v (1) liha. To pa je v protislovju s sodostjo desne strani. $\square$

Grafično zaporedje

Končno zaporedje naravnih števil

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$$

je *grafično*, če obstaja graf G z n točkami, ki imajo stopnje enake $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Primer

1. *Zaporedje* $3, 2, 2, 1, 0$ *je grafično.*

   Brez težav najdemo primer ustreznega graf.

2. *Ali je zaporedje* $5, 4, 3, 2, 2, 1$ *grafično?*

   Ne, saj je lihih vozlišč liho mnogo.

3. *Ali je zaporedje* $6, 4, 4, 3, 2, 2, 1$ *grafično?*

   Da. Najnaivnejši poskus risanja grafa deluje.

Izrek

Zaporedje $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ *je grafično natanko tedaj, ko je tudi zaporedje*

$$0, d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n \qquad (2)$$

grafično.

Izrek zaporedoma uporabljamo na naslednji način:

- Po vsaki uporabi novo zaporedje uredimo po velikosti do

$$d_1^{(1)} \geq d_2^{(1)} \geq \ldots \geq d_{n-1}^{(1)} \geq 0. \qquad (3)$$

- Znova uporabimo zgornji izrek. Zaporedje (3) je grafično natanko tedaj, ko je zaporedje

$$0, d_2^{(1)} - 1, d_3^{(1)} - 1, \ldots, d_{d_1^{(1)}+1} - 1, d_{d_1^{(1)}+2}, \ldots, d_{n-1}^{(1)}, 0. \qquad (4)$$

  grafično.

- Če po največ n-korakih pridemo do samih ničel, je zaporedje grafično. Če pa nekega koraka ne moremo izvesti, ker je premalo neničelnih členov, potem zaporedje ni grafično.

Primer

Ali je $5 \geq 4 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 1$ *grafično?*

$\Leftrightarrow$ $0, 3, 2, 1, 1, 0$ *je grafično.* *(Uporabimo izrek.)*

$\Leftrightarrow$ $3 \geq 2 \geq 1 \geq 1 \geq 0 \geq 0$ *je grafično.* *(Uredimo po velikosti.)*

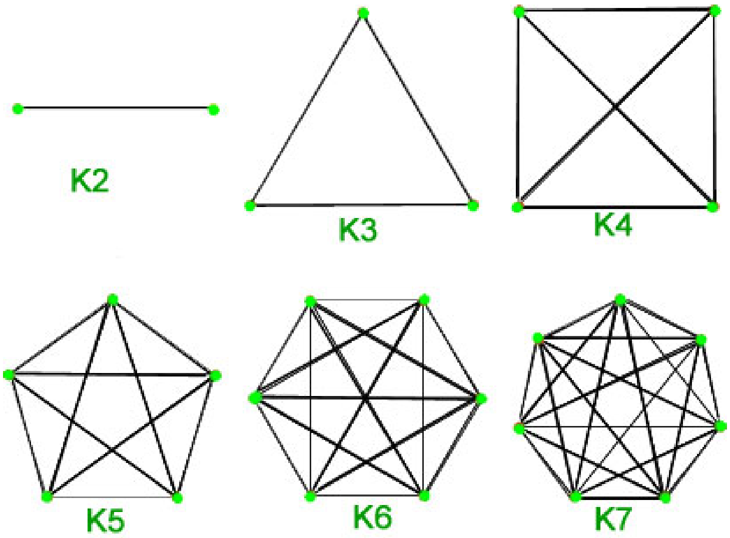
$\Leftrightarrow$ $0, 1, 0, 0, 0$ *je grafično.* *(Uporabimo izrek.)*

$\Leftrightarrow$ $1 \geq 0 \geq 0 \geq 0 \geq 0 \geq 0$ *je grafično.* *(Uredimo po velikosti.)*

Naslednjega koraka ne moremo narediti, kar pomeni, da nobene zaporedje v zgornjih ekvivalencah ni grafično.

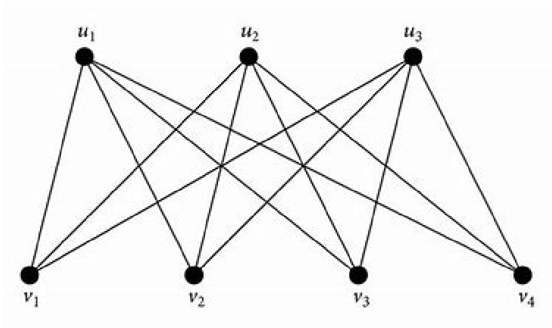
Nekatere družine grafov

Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na n točkah označimo z K_n.

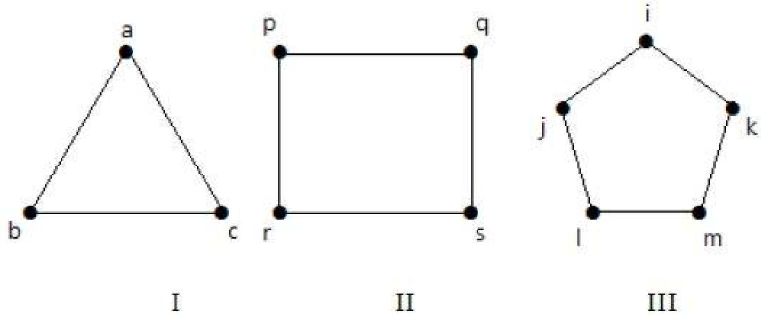


Graf je *prazen*, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na n točkah označimo s $\overline{K_n}$.

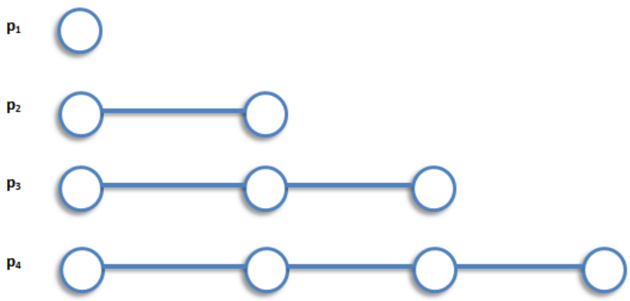
Graf je *polni dvodelni graf* na $n+m$ točkah, če vsebujee dva *barvna razreda* s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih. Te grafe označujemo z $K_{n,m}$.



Graf je *cikel* na $n \geq 3$ točkah, če je izomorfen grafu krožnici z n vozlišči na obodu. To označimo s C_n.

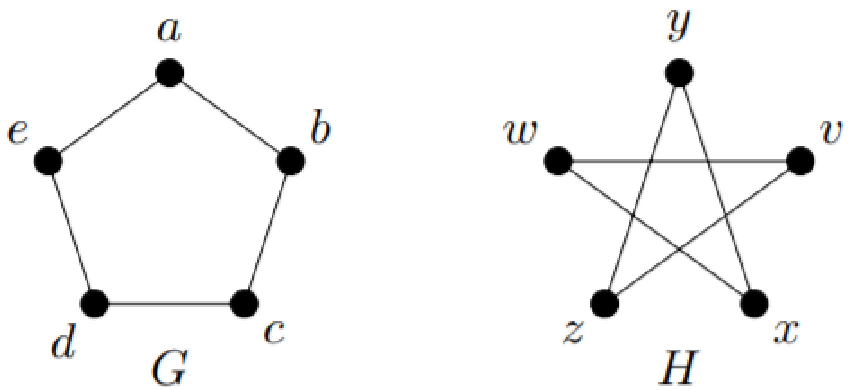


Graf je *pot* na n točkah, če je izomorfen grafu daljici z n vozlišči (poleg krajišč še $n-2$ notranjih točk). To označimo s P_n.



Izomorfizem grafov

Ali sta naslednja grafa kaj v sorodu?



Grafa G_1 in G_2 sta *izomorfna*, če obstaja preslikava

$$f : V(G_1) \to V(G_2),$$

za katero velja:

1. f je bijektivna in
2. $u \sim_{G_1} v \;\Leftrightarrow\; f(u) \sim_{G_2} f(v)$.

V tem primeru pravimo, da je f izomorfizem grafov G_1 in G_2, ter pišemo $G_1 \cong G_2$.

Izomorfizem grafov

Trditev

Izomorfizem ohranja število vozlišč, število povezav, stopnje vozlišč, število trikotnikov, ...

Če grafa nista izomorfna, pravimo, da sta *neizomorfna*.

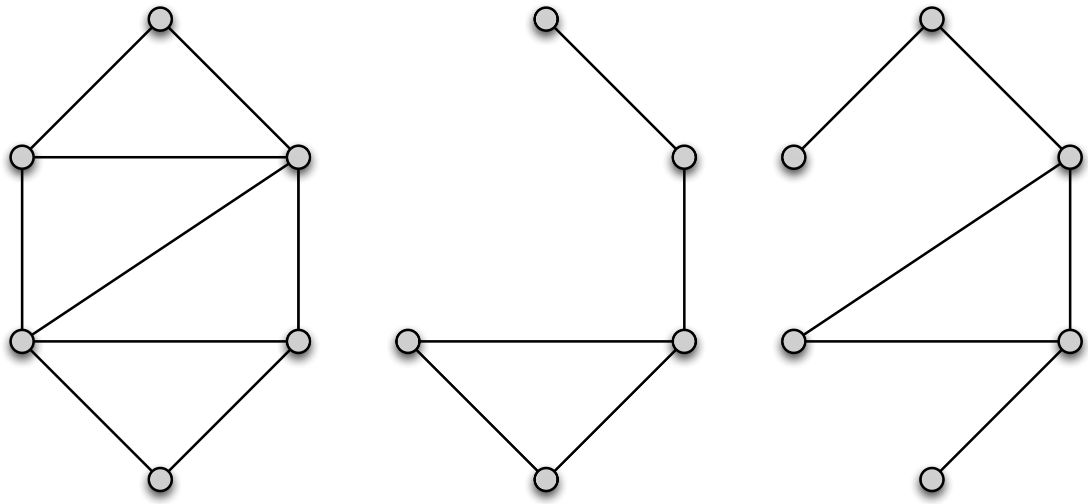
Primer

Grafa s prejšnje strani sta izomorfna. Izomorfizem je $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = w$, $f(d) = v$, $f(e) = z$.

Podgrafi

Naj bosta H in G grafa. Pravimo, da je:

- H *podgraf* grafa G, kar označimo z $H \subseteq G$, če je
  - $V(H) \subseteq V(G)$
  - $E(H) \subseteq E(G)$.
- H *vpet podgraf*, če je podgraf in velja še $V(H) = V(G)$.



Graf G. $H_1 \subseteq G$ $H_2 \subseteq G$, vpet.

Sprehod, pot, obhod, cikel

- *Sprehod* S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje vozlišč

$$u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1} u_n,$$

  pri čemer sta zaporedni vozlišči sprehoda u_i in u_{i+1} sosedi v grafu G $(i = 0, \ldots, n-1)$. Dolžina sprehoda $S = u_0 u_1 \ldots u_n$ je enaka n, $|S| = n$.
- Sprehod S je *pot*, če je $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.
- Sprehod S je *obhod*, če je $u_0 = u_n$.
- Sprehod S je *cikel*, če je $u_0 = u_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.

Povezanost grafov in povezane komponente

Graf G je *povezan*, če za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja sprehod z začetkom v u in koncem v v.

Razdalja med vozliščema u in v, tj. $d(u, v)$, je dolžina najkrajše poti od vozlišča u do v. Če u in v nista povezana, potem je $d(u, v) = \infty$. Posebej: $d(u, u) = 0$.

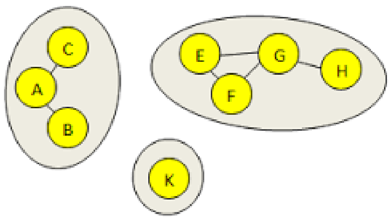
V množici točk grafa G definirajmo relacijo P z naslednjim predpisom:

$$uPv \iff \text{v grafu } G \text{ obstaja sprehod od } u \text{ do } v.$$

Trditev

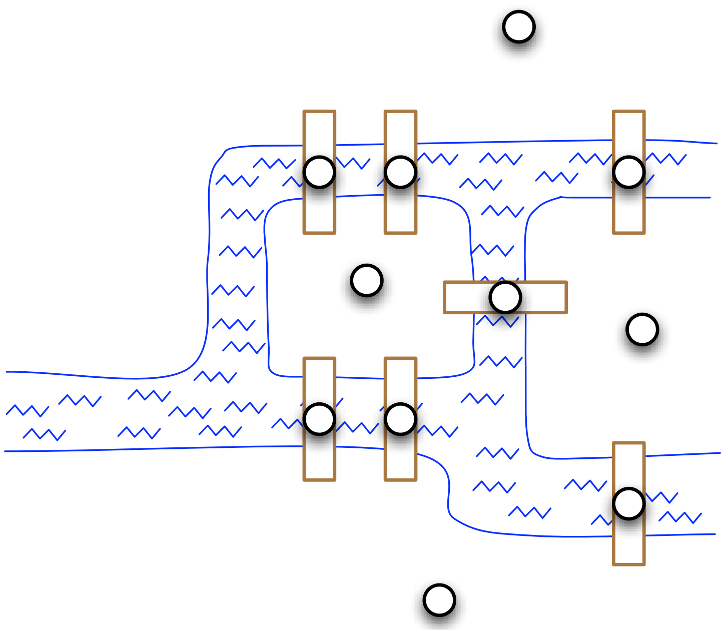
Relacija P je ekvivalenčna.

Ekvivalenčni razredom vozlišč (bolj natančno, na njih induciranim grafom) glede na relacijo P pravimo *komponente za povezanost*.



Eulerjev problem

Euler, 1736
Königsberg.



- *Ali obstaja obhod po mestu, ki bi prehodil vse mostove in sicer vsakega natanko enkrat?*

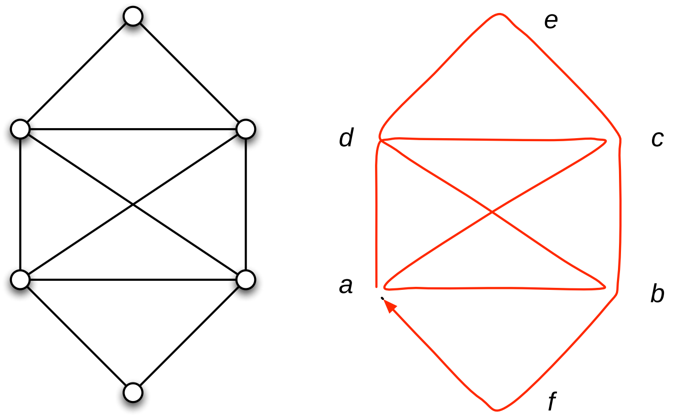
Eulerjevi grafi

Sprehod v grafu G je *enostaven*, če vsako povezavo *uporabi* največ enkrat.

Vprašanje: *Ali v grafu G obstaja enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave in vse točke?*

Enostaven obhod v grafu G, ki vsebuje vse povezave in vse točke imenujemo *Eulerjev obhod*.

Graf G je *Eulerjev*, če ima kak Eulerjev obhod.



Izrek (Euler)

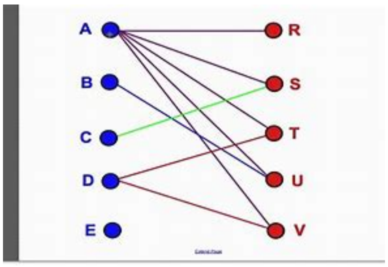
Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je G povezan in so vse njegove točke sodih stopenj.

Dokaz. Smer ($\Rightarrow$): Če je graf Eulerjev, potem ima Eulerjev obhod. To najprej pomeni, da je G povezan. Hkrati na obhodu v vsako točko, razen začetne oz. končne, vstopimo in izstopimo. To pomeni, da pri vsakem prehodu porabimo dve povezavi s krajiši v tej točki. Skupaj torej $2k$ povezav, kjer je k število prehodov. Za začetno oz. končno točko pa na začetku in koncu porabimo po eno povezavo, pri vsakem vmesnem prehodu pa dve povezavi. Torej je tudi ta točka sode stopnje.

Smer ($\Leftarrow$). Naj bo O najdaljši enostaven obhod v grafu G. Radi bi pokazali, da O vsebuje vse povezave. V nasprotnem obstaja neko vozlišče v_1 na O, iz katerega še vodi neka povezava $\{v_1, v_2\}$. Če tako vozlišče namreč ne bi obstajalo, obstajalo pa bi še vozlišče zunaj O-ja, potem G ne bi bil povezan. Na O smo v vsakem vozlišču porabili sodo število povezav (v vsako vozlišče pridemo in odidemo iz njega). Po povezavi $\{v_1, v_2\}$ iz v_1 pridemo v v_2. Ker je v_2 sode stopnje in smo na O porabili sodo mnogo povezav, mora obstajati še neka povezava $\{v_2, v_3\}$. Nadaljujemo ta premislek in ker je povezav končno mnogo, se po končno mnogo korakih vrnemo v v_1. Če se vrnemo v kakšnega od ostalih, npr. v_2, ga bomo lahko tudi zapustili, saj smo porabili samo liho mnogo povezav. Pri tem smo naredili enostaven obhod $v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_1$. Sedaj pa lahko O podaljšamo z obhodom $v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_1$ in dobimo daljši obhod. To pa je protislovje. Torej je O Eulerjev obhod.

Dvodelni grafi

Graf G je *dvodelen*, če lahko točke grafa G pobarvamo z dvema barvama takó, da ima vsaka povezava krajišči različnih barv.



Izrek

Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko G ne vsebuje ciklov lihe dolžine.

Dokaz.

Smer $(\Rightarrow)$: Naj bo G dvodelen. Dokažimo, da ne vsebuje ciklov lihe dolžine. Dokazujemo s protislovjem. V kolikor bi imeli cikel lihe dolžine, potem bi po lihem številu korakov prišli iz nekega vozlišča nazaj vase. Toda na vsakem koraku zamenjamo barvo vozlišča, zato bi morali biti po liho mnogo korakih v vozlišču nasprotne barve. To pa je protislovje.

Dokaz.

Smer $(\Leftarrow)$: Predpostavimo lahko, da je G povezan, sicer dokazujemo v vsaki komponenti za povezanost posebej. Naj bo v neko izbrano vozlišče. Definirajmo množici

$$A := \{u \in V(G) \colon d(u,v) \text{ je liho.}\}, \quad B := \{u \in V(G) \colon d(u,v) \text{ je sodo.}\}.$$

A in B sta iskana barvna razreda. Če bi bili dve točki u_1, u_2 iz npr. A sosedi, potem bi imeli obhod, ki se začne in konča v u in gre prek u_1 ter u_2. Po naslednji lemi od tod sledi, da obstaja tudi cikel lihe dolžine, kar je protislovje.

Lema

Če v grafu obstaja G obstaja obhod lihe dolžine, potem obstaja tudi cikel lihe dolžine

Dokaz leme. Naj bo $\mathcal{O} = u_0 u_1 \dots u_{n-1} u_0$ najkrajši obhod lihe dolžice. Dokazali bomo, da je $\mathcal{O}$ cikel. Torej moramo dokazati, da iz $u_i = u_j$, $i < j$, sledi $i = 0$ in $j = n$.

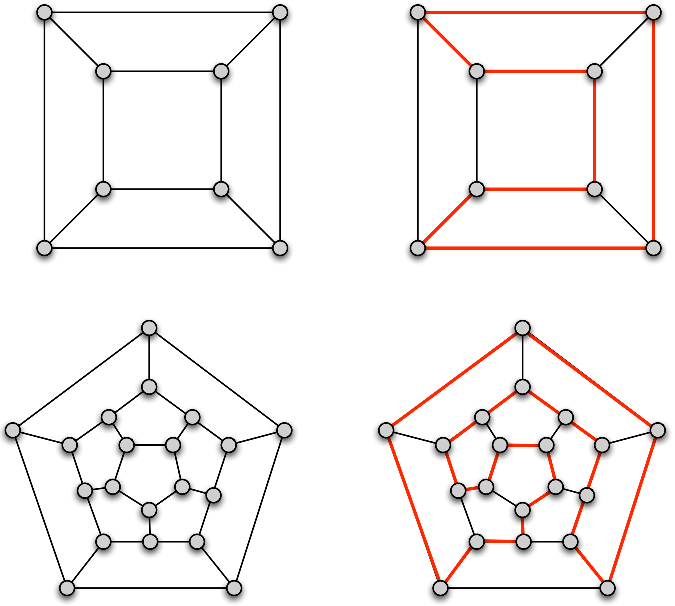
Naj bosta torej i, j indeksa, za katera velja $u_i = u_j$ in $i < j$. Potem sta $u_0 u_1 \dots u_i u_{j+1} \dots u_{n-1} u_n$ in $u_i u_{i+1} \dots u_j$ oba obhoda v G. Natanko eden od njiju je lihe dolžine. Če $i \neq 0$ ali $j \neq n$, potem je ta obhod krajši od $\mathcal{O}$, kar je protislovje. $\square$

Hamiltonovi grafi

Cikel v grafu G je **Hamiltonov**, če vsebuje vse točke grafa G.

Spomnimo se: Cikel v grafu vsebuje vsaj 3 točke in gre skozi posamezno točko grafa največ enkrat.

Hamiltonov cikel gre skozi vsako točko natančno enkrat.



Kako prepoznati Hamiltonove grafe

Hamiltonov problem je mnogo težji kot Eulerjev. Ne obstaja enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov.

Spoznali bomo en potreben in en zadosten pogoj, da je graf Hamiltonov.

Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf in $S \subseteq V(G)$ podmnožica vozlišč. Graf $G - S$ je graf z množico vozlišč $V(G) \setminus S$ in vsemi povezami iz $E(G)$, ki imata obe krajišči v $V(G) \setminus S$.

Izrek

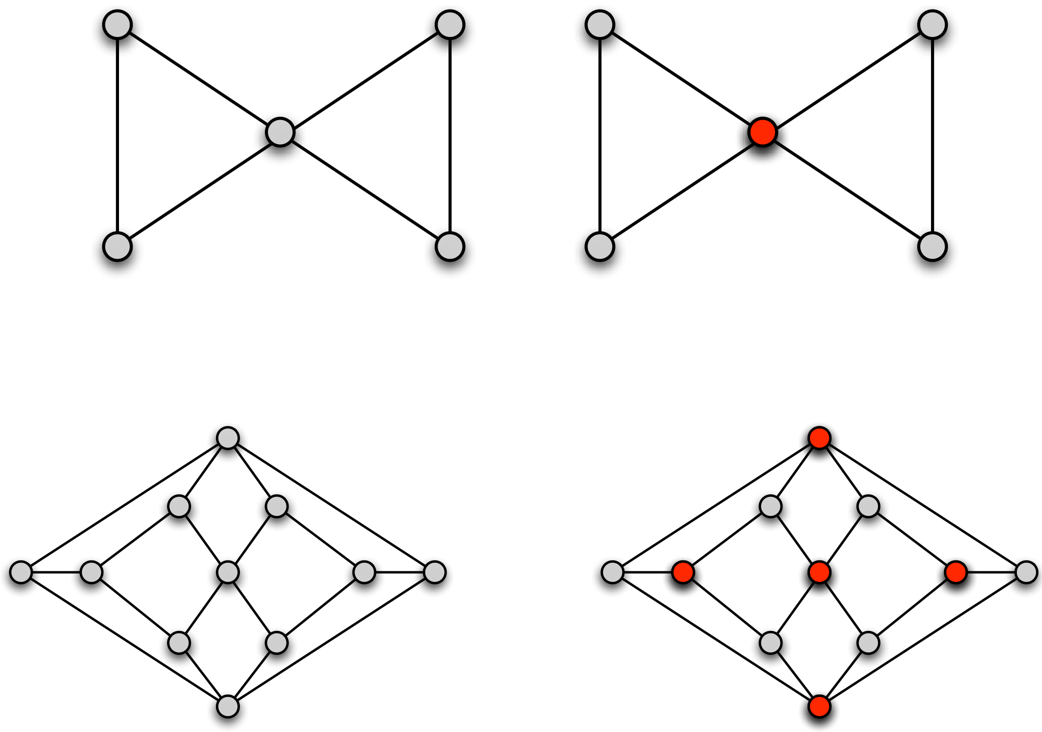
Naj bo G povezan graf. Denimo, da obstaja takšna podmnožica točk grafa $S \subseteq V(G)$ moči $|S| = k$, za katero velja, da ima

$$G - S$$

vsaj $k + 1$ povezanih komponent. Potem G ni Hamiltonov.

Toda! Če množica S iz izreka ne obstaja, to ne pomeni, da je graf Hamiltonov.

Zgledi



Potrebni pogoj z razpadom grafa ima v družini dvodelnih grafov naslednjo posledico.

Posledica

Naj bo G dvodelen graf z barvnima razredoma V_1 in V_2.
($V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1 je množica 'belih', V_2 množica 'črnih' točk.)
Če je $|V_1| \neq |V_2|$, potem G ni Hamiltonov.

Diracov zadostni pogoj je naslednji:

Izrek (Dirac)

Naj bo G graf z vsaj tremi točkami ($|V(G)| = n \geq 3$).
Če za vsako točko

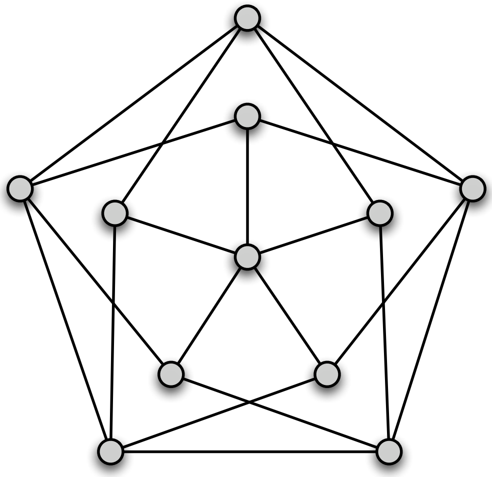
$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

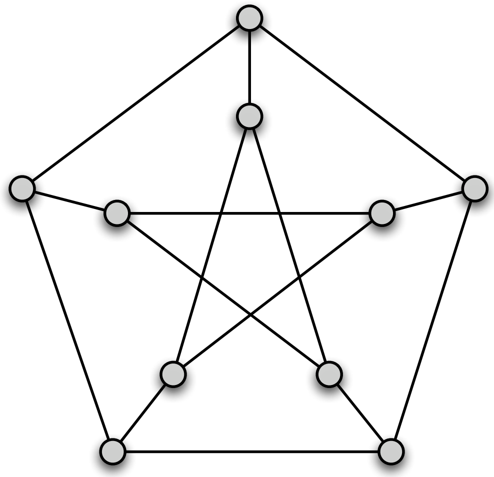
potem je graf G Hamiltonov.

Komentar: Pogoj je zadosten. To pomeni, da je vsak graf, ki izpolni omenjeni pogoj tudi Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil zgornji pogoj.

Grötzschev in Petersenov graf

Ali je kateri od naslednjih grafov, tj. lefi Grötzschev, desni Petersenov, Hamiltonov?





Barvanje grafov

***k*-barvanje** točk grafa G je preslikava

$$c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\},$$

za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih barv.

Najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje točk grafa G, imenujemo **kromatično število grafa** G in ga označimo s $\chi(G)$.

Primer

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$
2. $\chi(G) \leq 2 \iff G$ *dvodelen*
3. $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$
4. $\chi(K_{m,n}) = 2$
5. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ sod}, \\ 3, & n \text{ lih}. \end{cases}$

Velikost največje klike

Z $\omega(G)$ označimo velikost največjega **polnega podgrafa** v G.

Velja $\omega(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je G brez trikotnikov.

$\Delta(G)$ označuje največjo stopnjo točke v grafu G.

Izrek

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Velja celo boljši rezultat.

Izrek (Brooks)

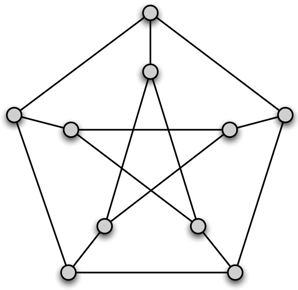
Naj bo G povezan graf. Če G ni niti lih cikel niti poln graf, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Zgled uporabe

Problem: Skladiščimo nevarne kemikalije $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$.

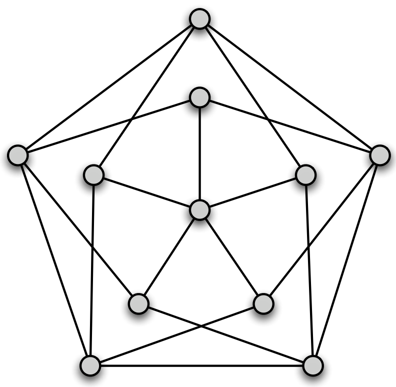
Predpisi določajo, da določenih nevarnih snov ne smemo skladiščiti skupaj. Poišči najmanjše potrebno število skladiščnih prostorov.

Petersenov graf



Kolikšno je njegovo kromatično število?

Grötzschev graf



Kolikšno je njegovo kromatično število?