Diskretne strukture

Izročki, relacije

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

22. november 2022

Naj bo A dana množica.

Množica R je *(dvomestna) relacija* v množici A, če je vsak njen element *urejen par* iz $A \times A$.

$$R \text{ je relacija.} \iff \forall x \in R\, \exists u, v : x = (u, v)$$

Primer

1. $A = \{e, f, g, h\}$ $\quad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$
   xRy ... *x je v abecedi neposredno pred y*
2. $A = \mathbb{N}$ $\quad R = \{(x, y) ; x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3. $\emptyset \subseteq A \times A$ *prazna relacija*
4. $U_A := A \times A \subseteq A \times A$ *univerzalna relacija*
5. $\mathrm{id}_A = \{(x, x) ; x \in A\}$ *relacija enakosti (identitete)*

Namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy.

Domena, zaloga vrednosti in lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A.

$\mathcal{D}_R = \{x\ ;\ \exists y : xRy\}$ *domena* ali *definicijsko območje* relacije R.

$\mathcal{Z}_R = \{y\ ;\ \exists x : xRy\}$ *zaloga vrednosti* relacije R.

Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$,
2. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$,
3. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$,
4. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$,
5. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$.

Zgledi

Primer

1. *Relacija* id_A *v* A *je refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna in enolična.*
2. *Relacija* $\leq$ *v* $\mathbb{N}$ *je refleksivna, antisimetrična, tranzitivna.*
3. *Relacija* $<$ *v* $\mathbb{N}$ *je antisimetrična, tranzitivna.*
4. *Relacija* $\subseteq$ *v* $\mathcal{P}A$ *je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.*
5. *Relacija "oče" v množici ljudi (x oče y preberemo kot x je oče y-ona.) je antisimetrična.*

Grafična predstavitev relacije

R naj bo relacija v *končni* množici A.

Elemente množice A narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja aRb, narišemo *usmerjeno puščico* od a do b.

elementi A ... točke v ravnini
aRb ... usmerjena puščica od a do b.

Vprašanje: Kako iz grafa relacije R videti, katere od lastnosti ima relacija R? Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff$ Vsaka točka povezana sama s sabo s puščico v obe smeri.
2. R *simetrična* $\iff$ Vse puščice so usmerjene v obe smeri.
3. R *antisimetrična* $\iff$ Ne obstaja puščica med različnima točkama, usmerjena v obe smeri.
4. R *tranzitivna* $\iff$ Če iz točke 1 v točko 2 in iz točke 2 v točko 3 vodita usmerjeni puščici, potem tudi iz točke 1 v točko 3 vodi usmerjena puščica.
5. R *enolična* $\iff$ Iz vsake točke vodi največ ena usmerjena puščica v neko točko.

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup, \cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A. V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- *inverzno relacijo* relacije R, označimo jo z R^{-1}:

  $$R^{-1} := \{(y, x) \; ; \; (x, y) \in R\}$$

  Velja $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$.

- *produkt relacij* R in S, označimo ga z $R * S$:

  $$R * S := \{(x, z) \; ; \; \exists y \; (xRy \wedge ySz)\}$$

Primer (sorodstvene relacije med ljudmi)

Relacija oče v množici ljudi je definirana kot

$$x \text{ oče } y \;\Leftrightarrow\; x \text{ je oče } y\text{-ona.}$$

Naloga: *Izrazi relacije roditelj, zet, snaha, ded, vnuk, tašča, svak z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami oče, mati, sin, hči, mož, žena, . . .*

roditelj $= \text{oče} \cup \text{mati}$

mati $= \text{roditelj} \setminus \text{oče}$

zet $= \text{mož} * \text{hči}$

ded $= \text{oče} * \text{oče} \cup \text{oče} * \text{mati} = \text{oče} * (\text{oče} \cup \text{mati}) = \text{oče} * \text{roditelj}$

vnuk $= \text{sin} * \text{sin} \cup \text{sin} * \text{hči} = \text{sin} * (\text{sin} \cup \text{hči}) = \text{sin} * \text{otrok}$

tašča $= \text{mati} * \text{mož} \cup \text{mati} * \text{žena} = \text{mati} * \text{zakonec}$

svak $= \text{brat} * \text{žena} \cup \text{brat} * \text{mož} \cup \text{mož} * \text{sestra} =$
$\text{brat} * \text{zakonec} \cup \text{mož} * \text{sestra}$

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo *potence* relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{aligned} R^0 &:= \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} &:= R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{aligned}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta m in n celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako R^{m+n}.

Primer (Sorodstvene relacije med ljudmi - ponovno)

Definiraj relacije **prednik**, **potomec**, **sorodnik**.

$$\begin{aligned} \mathit{prednik} &= \mathit{roditelj} \cup \mathit{roditelj} * \mathit{roditelj} \\ &\quad \cup \mathit{roditelj} * \mathit{roditelj} * \mathit{roditelj} \cup \ldots = \\ &\quad \mathit{roditelj} \cup \mathit{roditelj}^2 \cup \mathit{roditelj}^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathit{roditelj})^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{potomec} &= \mathit{otrok} \cup \mathit{otrok} * \mathit{otrok} \cup \mathit{otrok} * \mathit{otrok} * \mathit{otrok} \cup \ldots = \\ &\quad \mathit{otrok} \cup \mathit{otrok}^2 \cup \mathit{otrok}^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathit{otrok})^k \end{aligned}$$

$$\mathit{sorodnik} = \mathit{potomec} * \mathit{prednik} = \mathit{potomec} * \mathit{potomec}^{-1}$$

Naj bo R relacija v A.

Relacijo R^+ imenujemo *tranzitivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo R^* imenujemo *tranzitivno-refleksivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Vprašanje: Kako s pomočjo grafa relacije R opišemo grafa relacij R^+ in R^*?

Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$ je *ekvivalenčna*, če je

- refleksivna,
- simetrična in
- tranzitivna.

Primer

1. *Relacija* $||$ *vzporednosti v množici vseh premic v ravnini.*
2. $A = \{ljudje\}$, $xRy \iff x$ *ima enako barvo oči kot* y.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}+ \; : xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
   x *in* y *imata isto funkcijsko vrednost.*
4. *Naj bo* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. *Definirajmo relacijo* R *v množici* $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff m \text{ deli } |x - y|$$

kongruenca po modulu m.

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna in $x \in A$.

$R[x] = \{y \in A \,;\, yRx\}$ je *ekvivalenčni razred* elementa x.

$A/R = \{R[x] \,;\, x \in A\}$ (množica vseh ekvivalenčnih razredov) je *faktorska (kvocientna) množica* množice A po relaciji R.

Trditev

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem za poljubna $x, y \in A$ velja

$$R[x] = R[y] \iff xRy$$

Izrek

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem je A/R razbitje množice A.

Primer

- *"ljudje"/"ista barva oči"* $=$ $\{\{$*ljudje z očmi rjave b.*$\}, \{$*ljudje z očmi zelene b.*$\}, \ldots\} \cong$ $\{$*rjava,zelena*$, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}/$*"isti ostanek pri deljenju s 5"* $=$ $\{\{\ldots, 0, 5, 10, \ldots\}, \{\ldots, 1, 6, 11, \ldots\}, \ldots\} =$ $\{R[0], R[1], R[2], R[3], R[4]\} \cong \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Primer

Naslednje relacije niso ekvivalenčne:

- *Relacija "imata bankovec z isto vrednostjo v denarnici" v množici ljudi.*
- *Prazna relacija na (neprazni) množici A.*
- *"Je deljiv z istim praštevilom kot" v množici naravnih števil.*
- *"Je približno enak" v množici realnih števil.*