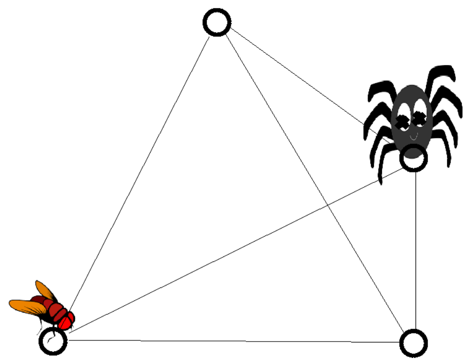
11. Pajkov četverec in muha (26.nov. - 1.dec.)

Muha se je ujela v pajčevino. “Ah, ah,” tako je vzdihovala, ko se ni mogla nikakor več rešiti, “da nisem videla teh nitk, te mreže. Ah, zakaj ne predejo pajki debelejših mrež; potem bi se gotovo ne ujela. “Tudi jaz mislim, da bi se ne,” je dejal nato pajek zaničljivo in zagrabil ubogo muho, “toda mi pajki nismo tako neumni. Kdor hoče koga zapeljati in ujeti, mora nastavljati tanke, malovidne mreže, le zapomni si, muha. Tebi že povem, ker te bom takoj zadavil.” Rečeno, storjeno. – Dragotin Kette

Ali veste, kdo posnema pajka?

Teta kriptografija opazi, da je pajkova mreža povezuje štiri enako oddaljena vozlišča na vseh šest načinov (mimogrede: zato telesu, ki nastane kot konveksna ogrinjača, matematiki rečejo četverec) in da se nahajata muha in slepi pajek v različnih vozliščih. Muha se ne more premakniti, pajek pa se premika naključno iz enega vozlišča v drugega.

(a) **Koliko je pričakovano število obratov predno pajek doseže muho? Kaj pa, če četverec nadomestimo z 1-skeletom kakšnega drugega Platonovega telesa: (b) kocko, (c) oktaedrom, (d) dodekaedrom, (e) ikozaedrom ali (f) kvadrat ter privzamemo, da pajek pričně nasproti (tj. antipodno od) muhe?**



Naj bo X število obratov do muhe iz začetnega vozlišča. Po prvem obratu ima pajek $1/3$ možnosti, da pride do muhe in $2/3$, da pride pride v enak položaj kot na začetku:

$$E(X) = (1/3)\cdot 1 + (2/3)\cdot\big(1+E(X)\big),$$

od koder dobimo $E(X)=3$. Zapišemo lahko tudi verjetnostno tabelo:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ 1/3 & (2/3)(1/3) & (2/3)^3(1/3) & \cdots & (2/3)^{n-1}(1/3) & \cdots \end{pmatrix},$$

vendar moramo potem izračunati naslednjo vsoto (pomagamo si s $q=2/3$):

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot q^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\Big)' = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-q}\Big)' = \frac{1}{3}(-1)(-1)(1-q)^{-2} = 3.$$

(b) Naj bo X število obratov do muhe iz začetnega vozlišča. Naj bo Y število obratov do muhe iz diagonalnega vozlišča na skupnem licu z muho. Naj bo Z število obratov do muhe iz sosednjega vozlišča z muho. Po prvem obratu je pajek v diagonalnem vozlišču na skupnem licu z muho, torej je

$$E(X) = E(Y) + 1.$$

Ko je pajek v nekem položaju "Y" ima 2/3 možnosti, da pride v položaj "Z" in $1/3$, da pride nazaj v položaj "X":

$$E(Y) = (2/3) * (1 + E(Z)) + (1/3) * (1 + E(X)).$$

Iz položaja "Z" ima pajek 1/3 možnosti, da pride do muhe in 2/3, da pride v položaj "Y"

$$E(Z) = (1/3) * 1 + (2/3) * (1 + E(Y)).$$

Sedaj rešimo sistem in dobimo $E(X) = 10$.

Podobno dobimo: (c) oktaeder 6, (d) dodekaerder 35 in (e) ikozaeder 15.

(f) Naj bo X število obratov do muhe iz diagonalnega vozlišča.
Naj bo Y število obratov do muhe iz sosednjega vozlišča z muho.
Po prvem obratu je pajek na isti stranici z muho, torej je

$$E(X) = E(Y) + 1.$$

Ko je pajek v nekem položaju "Y" ima 1/2 možnosti, da pride do muhe in $1/2$, da pride nazaj v položaj "X":

$$E(Y) = (1/2) * 1 + (1/2) * (1 + E(X))$$

Sedaj rešimo sistem in dobimo $E(X) = 4$. Če pa bi muha začela v "Y", potem bi bil odgovor seveda $E(Y) = 3$.

Naj bo P prehodna matrika, tj.

$$(P)_{ij} = \text{verjetnost prehoda iz stanja } i \text{ v stanje } j.$$

Dalje naj bo T_{ik} število korakov (v nekem smislu čas), ki jih potrebujemo, da pridemo do stanja k (lahko tudi bolj splošno, do množice stanj K).
Iz matrike P sestavimo novo matriko R takole:

$$(R)_{ij} = (P)_{ij}, \text{ če je } i \neq k, \quad (R)_{kk} = 1 \quad \text{ter} \quad (R)_{kj} = 0 \text{ za } j \neq k.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ izračunamo vrednost $(R^n)_{ij}$, ki predstavlja verjetnost, da smo začeli v stanju i in se po n korakih nahajamo v stanju j. Potem velja

$$P(T_{ik} = n) = (R^n)_{ik} - (R^{n-1})_{ik},$$

saj je to verjetnost, da smo po n korakih v stanju k, en korak prej pa ne.
Tako smo dobili porazdelitev T_{ik}, njena pričakovana vrednost pa je

$$E(T_{ik}) = \sum_{n=1}^{\infty} n\big((R^n)_{ik} - (R^{n-1})_{ik}\big).$$

Prehodna matrika ter matrika R, pri čemer je $k = 2$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Potem je

$$R^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Namig (za primer z dodekaedrom): uporabi 3D simetrijo, saj lahko poljuben par na razdalji i $(0 \le i \le 5)$ preslikamo v poljuben drug par na isti razdalji. Takim grafom (kar 1-skelet dodekaedra v resnici je) pravimo **razdaljno tranzitivni grafi** (DTG, angl. distance-transitive graphs).

Vpeljimo oznako $p_i = E(X_i)$, kjer je X_i slučajna spremenljivka, ki šteje pajkove obrate za razdaljo i od muhe. Potem je $p_0 = 0$ in dobimo

$$p_5 = p_4 + 1, \;\; 3(p_4 - 1) = p_5 + 2p_3, \;\; 3(p_3 - 1) = p_4 + p_3 + p_2,$$

$$3(p_2 - 1) = p_3 + p_2 + p_1, \;\; 3(p_1 - 1) = 2p_2$$

oz.

$$p_5 = 35, \;\; p_4 = 34, \;\; p_3 = 32, \;\; p_2 = 27, \;\; p_1 = 19.$$

Opazimo, da smo nalogo rešil ne glede na to,
na kakšni začetni razdalji sta pajek in muha.

Namesto simetrije, se lahko pogovarjamo o regularnosti.

Npr. vsako vozlišče ima v našem primeru stopnjo 3, tj. $k = 3$.

Množico vozišč na razdalji i od $u \in V$ imenujemo **sfera** $S_i(u)$ (i je radij, u središče). Inducira regularen graf, stopnjo označimo z a_i.

Poglejmo si množico koncentričnih sfer, t.i. **razdaljno particijo**. Med $S_i(u)$ in $S_j(u)$ ($j > i$) bodisi ni povezav (če je $j - i > 1$) ali pa so in je $j = i + 1$. Tedaj gledamo podgraf, ki ga inducirajo povezave med sferama, ki je biregularen. Ustrezni regularnosti označimo z b_i in c_{i+1}.

Prišli smo do treh zaporedij $\{a_i\}_{i=0}^{D}, \{b_i\}_{i=0}^{D}$ in $\{c_i\}_{i=0}^{D}$ ($c_1 = 1$, $c_{-1} = a_0 = b_D = 0$). Kadar takšna zaporedja obstajajo in so neodvisna od začetnega vozlišča, rečemo, da gre za **razdaljnjo-regularen graf** (DRG). Ker je $a_i + b_i + c_i = k$, ponavadi navedemo le zadnji dve zaporedji:

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{D-1}; c_1, c_2, \ldots, c_D\}$$ (t.i. **presečno zaporedje**).

Za dodekaeder imamo $D = 5$ in $\{3, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 2, 3\}$.

Za DRG premera D dobimo naslednji sistem (ne pozabi, da je $p_0 = 0$).

$$k(p_i - 1) = c_i p_{i-1} + a_i p_i + b_i p_{i+1} \quad (1 \leq i \leq D).$$

Za ikozaeder: $\{5, 2, 1; 1, 2, 5\}$ sledi $p_3 = 15$, $p_2 = 14$, $p_1 = 11$.
Za Q_3: $\{3, 2, 1; 1, 2, 3\}$ sledi $p_3 = 10$, $p_2 = 9$, $p_1 = 7$. Kaj pa za Q_n, tj.

$$n\text{-dimenzionalno kocko}: \quad \{n, n-1, \ldots, 2, 1; 1, 2, \ldots, n-1, n\},$$

ki je dvodelen graf, tj. $a_i = 0$ in se sistem enačb nekoliko poenostavi:

$$n(p_i - 1) = i p_{i-1} + (n-i) p_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Pri $n = 4$ dobimo prvi neceloštevilčni primer:

$$p_4 = 64/3, \ p_3 = 61/3, \ p_2 = 56/3 \ \text{in} \ p_1 = 15,$$

tako da je morda še večji izziv zapisati splošno rešitev.

Set $f_i := p_{n-i} - p_{n-i-1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, so $f_{n-1} = p_1$, and $j := n - i$. Then $f_{n-j} = p_j - p_{j-1}$ $(1 \leq j \leq n)$, $p_n = p_{n-1} + 1$ implies $f_0 = 1$ and

$$(i + n - i)p_i - n = ip_{i-1} + (n-i)p_{i+1},$$

i.e.,

$$i(p_i - p_{i-1}) - (n-i)(p_{i+1} - p_i) = n,$$

i.e.,

$$i\ f_{n-i} - (n-i)f_{n-i-1} = n, \ \text{ i.e., } \ (n-j)\ f_j - j\ f_{j-1} = n$$

implies

$$f_i = \frac{i\ f_{i-1} + n}{n-i} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Thus f_i is a function of n. Also $p_j = \displaystyle\sum_{i=n-j}^{n-1} f_i$ and in particular $p_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f_i$.

$$f_1 = \tfrac{n+1}{n-1},\; f_2 = \tfrac{2(n+1)+n(n-1)}{(n-1)(n-2)},\; f_3 = \tfrac{6(1+n)+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$f_4 = 4!\frac{1+\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$f_m = m!\,\frac{1+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!}\prod_{i=0}^{j-1}(n-i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(n-i)} = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}}{\binom{n-1}{m}} \quad (0 \le m \le n-1),$$

$$p_1 = f_{n-1} = (n-1)!\,\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(n-i)} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} = 2^n - 1.$$

Naslednji primer je graf povezav Petersenovega grafa, oznaka $L(\text{Pet})$.

Pet.: Vzamimo vse pare iz množice simbolov $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ($\binom{5}{2} = 10$), in proglasimo dva za sosednja, če je njun presek prazen ($\{3, 2; 1, 1\}$).

(Dobljeni graf je isto, kot če bi v tetraedru (K_4), dodali za vozlišča še središča vseh povezav (teh je $\binom{4}{2} = 6$) in povezali tiste, ki ustrezajo nasprotnim povezavam.)

$L(\text{Pet.})$ ima presečno zaporedje $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$. Oba grafa imata veliko simetrije, saj lahko simbole $\{1, \ldots, 5\}$ poljubno permutiramo.

Če je v grafu "biti na maksimalni razdalji ali 0" ekvivalenčna relacija, potem rečemo, da je graf **antipoden**. Kvadrat in 1-skeleti Platonovih teles so vsi antipodni. Pri vseh razen enemu je velikost ekvivalenčnega razreda 2. Pri polnem grafu K_n (v spošnem) pa imamo en sam razred z velikostjo n.

Če je na maksimalni razdalji eno samo vozlišče, potem je graf vedno antipoden (saj je tranzitivnost na prazno izpolnjena).
$L(\text{Pet.})$ je tudi antipoden, vendar je velikost antipodnega razreda enaka 3.

Glede na to, da imamo tri vozlišča, ki so na medsebojni razdalji 3, označimo jih z u, v, w, je vprašanje, če stvar kaj spremeni, če hodi pajek po najkrajših poteh med u in v, ali pa gre še malo v smer vozlišča w. Vendar nas to prav nič ne moti, saj štejejo le števila iz presečnega zaporedja in dobimo

$$p_3 = 20, \quad p_2 = 19, \quad p_1 = 14.$$

V DRG obstajajo še konstante, ki jim pravimo **presečna števila**

$$p_{ij}^h = |S_i(u) \cap S_j(v)|,$$

in so neodvisne od izbire vozlišč u in v na razdalji h.

Zaradi simetrije v definiciji je $p_{ij}^h = p_{ji}^h$.

Dalje je $p_{i1}^i = a_i$, $p_{i-1,1}^i = c_i$ in $p_{i+1,1}^i = b_i$,
pa tudi $p_{i0}^h = \delta_{ih}$ (kroneckerjev delta) ter $p_{ij}^0 = \delta_{ij}$.

Naj bo A **matrika sosedosti** za graf $G = (V, E)$, tj. binarna (kvadratna) matrika, katere stolpci in vrstice so indeksirani z V, (u, v)-ti element matrike, tj. $A_{u,v}$, pa je enak 1 natanko tedaj, ko $u \sim_G v$.

Potem se ni težko (z indukcijo) prepričati, da za $h \in N_0$ velja

$$(A^h)_{u,v} = \text{število sprehodov dolžine } h \text{, ki se začnejo v } u \text{ in končajo v } v.$$

Vpeljimo še graf G_i $(0 \leq i \leq D)$, kjer je D premer grafa G, z $V(G_i) = V(G)$ in $u \sim_{G_i} v$ natanko tedaj, ko je $d(u, v) = i$. Naj bo A_i matrika sosednosti za G_i. Potem je $\sum_{\ell=0}^{D} A_\ell = J$, tj. matrika samih enic in

$$A_i A_j = \sum_{\ell=0}^{D} p_{ij}^{\ell} A_\ell \quad (0 \leq i, j \leq D), \text{ ko je graf } G \text{ razdaljno-regularen.}$$

Od tod sledi (indukcija po h in $i = 1 = j$ v zgornji identiteti), da se da tudi potenca A^h izraziti kot linearna kombinacija matrik A_ℓ $(0 \leq \ell \leq D)$, kar pomeni, da je število sprehodov dolžine h odvisno le od razdalje med krajiščima, s tem pa tudi p_h, kar smo ves čas uporabljali brez dokaza.