Diskretne strukture

Predikatni račun, izročki

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

25. oktober 2022

Zakaj predikatni račun?

- *Izjavni račun (IR)* se ukvarja s *trditvami* in *povezavo med njimi*. Glavno vprašanje IR je:

  Ali iz resničnosti trditev, ki so zapisane v predpostavkah, sledi resničnost trditev, ki so zapisane v zaključku sklepa?

- *Predikatni račun (PR)* pa se bo ukvarjal z *elementi neke množice*, njihovimi *lastnostmi* in *povezavami med njimi*.

- Glavna razlika PR v primerjavi z IR je ta, da v PR:
  - Izberemo *področje pogovora*, tj. množico, iz katere izbiramo elemente.
  - Poleg logičnih veznikov sta dovoljena še *kvantifikatorja* $\forall$ (za vsak element), $\exists$ (obstaja element).

- PR vsebuje kot poseben primer IR.

Zakaj predikatni račun?

- Spodnji sklep v izjavnem računu ni veljaven.

Predpostavki:	*Vsi študentje računalništva morajo opraviti predmet diskretne strukture.*
	Jaka je študent računalništva.
Zaključek:	*Jaka mora opraviti predmet diskretne strukture.*

- Je pa v izjavnem računu veljav en naslednji sklep:

Predpostavki:	*Če je Jaka študent računalništva, potem mora opraviti predmet diskretne strukture.*
	Jaka je študent računalništva.
Zaključek:	*Jaka mora opraviti predmet diskretne strukture.*

- Opaziš razliko?

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora $\mathcal{D}$ je neprazna *množica*. Na primer ljudje, številke, živali.

Predikati so *logične funkcije*, ki za svoje argumente uporabijo elemente področja pogovora. Ko v predikat vstavimo izbrane elemente, dobimo izjavo, ki ima logično vrednost 1 ali 0. To vrednost vrne predikat.

Primer

Področje pogovora: $\mathbb{Z}$.

Predikat: $P(x, y) =$ “$x > y$“.

$P(4, 3)$ *pomeni* “$4 > 3$“. *Torej ima* $P(4, 3)$ *logično vrednost 1.*

$P(3, 4)$ *pomeni* “$3 > 4$“. *Torej ima* $P(3, 4)$ *logično vrednost 0.*

Pri tem $P(x, y)$ *ni enakovredno* $P(y, x)$.

Predikati

Število argumentov $x_1, \ldots, x_n$ predikata $P(x_1, \ldots, x_n)$ imenujemo *mestnost predikata*.

Trditev

V izbrani interpretaciji:

- *Enomestni predikati ustrezajo lastnostim elementov področja pogovora.*
- *Dvomestni predikati ustrezajo zvezam (tudi relacijam) med elementi področja pogovora.*

Primer

Področje pogovora: $\mathbb{Z}$.

Enomestni predikat: $P(x) =$ "x^2 *je pozitivno število*".

Dvomestni predikat: $P(x, y) =$ "$x > y$".

Kvantifikatorja

Radi bi izrazili trditve oblike:

- *Nekateri* ptiči ne letijo.
- Kvadrat *poljubnega* realnega števila je nenegativno število.
- Na spletu *nihče* ne pozna tvoje identitete.

V ta namen potrebujemo *dva kvantifikatorja*:

$\forall$	*univerzalni kvantifikator*	"Za vsak"
$\exists$	*eksistenčni kvantifikator*	"Obstaja"

Primer

Nekateri ptiči ne letijo.

Področje pogovora $\mathcal{D}$ ... množica ptičev.

Predikat ... $\exists x \in \mathcal{D}$: "x ne leti."

Kvantifikatorja

Primer

Kvadrat poljubnega realnega števila je nenegativno število.

Področje pogovora $\mathcal{D} \ldots$ *množica* $\mathbb{R}$.

Predikat $\ldots \forall x \in \mathbb{R}$: "$x^2 \geq 0.$"

Primer

Na spletu nihče ne pozna tvoje identitete.

Področje pogovora $\mathcal{D} \ldots$ *množica vseh uporabnikov spleta.*

Predikat $\ldots \neg(\exists x \in \mathcal{D}$: "x *pozna tvojo identiteto.*")

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo $\mathcal{D}$ področje pogovora.

$\forall x \in \mathcal{D},\ P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko imajo vsi elementi iz $\mathcal{D}$ lastnost P. Sicer je neresnična.

$\exists x \in \mathcal{D},\ P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko obstaja element iz $\mathcal{D}$, ki ima lastnost P. Sicer je neresnična.

Primer

Naj bo $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ končna množica. Potem je

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in \mathcal{D},\ P(x)) &\equiv (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)),\\
(\exists x \in \mathcal{D},\ P(x)) &\equiv (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)).
\end{aligned}
$$

Primer

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- *Nekateri ljudje so nepošteni.*
- *Noben človek ni nepošten.*
- *Vsi ljudje so nepošteni.*

Jezik predikatnega računa

- Naj bo $\mathcal{D}$ področje pogovora. V jeziku predikatnega računa uporabljamo:
  - *spremenljivke* $x, y, z, \ldots$ iz $\mathcal{D}$,
  - *konstante* $a, b, c, \ldots$ iz $\mathcal{D}$,
  - *predikate* $P, Q, R, \ldots$,
  - izjavne veznike $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$,
  - *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
  - oklepaja (in) .
- Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.
- *Atomi* predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x,y), Q(a,x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule

Izjavne formule definiramo induktivno:

1. Atomi so izjavne formule.

2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \ldots$$

$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$

izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev; vezane in proste spremenljivke

- Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

- V formuli imamo vezane in proste spremenljivke:

  - vstop spremenljivke x je *vezan*, če se ta x nahaja v dosegu (območju delovanja) kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$,
  - vstop spremenljivke, ki ni vezan, je *prost*.

- Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

- Kvantifikatorji imajo *"isto prednost"* kot negacija.

Doseg kvantifikatorjev; vezane in proste spremenljivke

Primer

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

1. $\forall x\, P(x, y) \wedge Q(x, y)$,
2. $\forall x\, P(w, y) \wedge Q(x, y)$,
3. $\forall x\, (P(x, y) \wedge Q(z, y))$,
4. $\forall x \neg \exists y \forall z\, P(x, y, z)$,
5. $\exists x\, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$,
6. $\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$.

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo **področje pogovora** interpretacije.

Poleg tega

- vsakemu **predikatu** ustreza $0/1$ **logična funkcija** v $\mathcal{D}$
- vsaki **konstanti** določimo **vrednost** v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki **prosti** spremenljivki v W določimo **vrednost** v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse **proste** vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

W	$P(x) \vee \exists x\, Q(x, y) \wedge R(b, x)$
$W(x/a)$	$P(a) \vee \exists x\, Q(x, y) \wedge R(b, a)$

Ne zamenjamo spremenljivke y in vezanega vstopa x-a.

Formula $\forall x\, W$ je **resnična** v **interpretaciji** $\mathcal{I}$, če je za **vsak** element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je **resnična** v *interpretaciji* $\mathcal{I}$, če v področju pogovora **obstaja** $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Preimenovanje spremenljivk

V formuli nas motijo spremenljivke z **istim imenom**, ki so vezane z **več** različnimi kvantifikatorji ali pa **hkrati proste** in **vezane**.

Dejstvo: če je W formula, potem imen **prostih spremenljivk ne smemo spreminjati**, če želimo pridelati enakovredno formulo.

Želja: **Vezane** spremenljivke lahko *preimenujemo* tako, da **ista** spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- **ne** nastopa pri **več** kvantifikatorjih,
- **ni** hkrati **vezana** in **prosta**.

Primer

Preimenuj spremenljivke v spodnji formuli v skladu z zgornjo željo:

$$\forall x \exists y\,(P(x,y) \Rightarrow \exists x\, Q(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \vee S(y).$$

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta **enakovredni**, če imata **isto** logično **vrednost** v **vseh** možnih **interpretacijah**. To označimo z $W \sim V$.

Interpretacija formul W in V pomeni, da vse predikate, konstante in spremenljivke hkrati izbiramo iz istega področja pogovora. Tudi pomen predikatov v obeh formulah mora biti isti.

Izjavna formula W je **splošno veljavna**, če je **resnična** v *vsaki* interpretaciji.

Izjavna formula V je **neizpolnljiva**, če je **neresnična** v **vsaki** interpretaciji.

Splošno veljavne in neizpolnljive izjavne formule so ustreznice tavtologij in protislovij v predikatnem računu.

Zakoni predikatnega računa

Pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

1. **de Morganova zakona**:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

2. **zamenjava istovrstnih kvantifikatorjev**:

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

3. **distributivnost**:

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x *ne pojavi prosto* v formuli C, potem veljajo naslednje enakovredosti:

1. **kvantifikator in disjunkcija**:

$$\forall x\,(C \vee W) \sim C \vee \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \vee W) \sim C \vee \exists x\, W$$

2. **kvantifikator in konjunkcija**:

$$\forall x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \exists x\, W$$

Kaj pa implikacija?

Privzemimo, da x **ne nastopa prosto** v C in računajmo:

1. $\forall$ **in implikacija 1**:

$$\begin{aligned} & \forall x\,(W \Rightarrow C) \\ \sim\quad & \forall x\,((\neg W) \vee C) \\ \sim\quad & (\forall x\,\neg W) \vee C \\ \sim\quad & \neg\exists x\,W \vee C \\ \sim\quad & \exists x\,W \Rightarrow C \end{aligned}$$

2. $\forall$ **in implikacija 2**:

$$\begin{aligned} & \forall x\,(C \Rightarrow W) \\ \sim\quad & \forall x\,((\neg C) \vee W) \\ \sim\quad & (\neg C) \vee \forall x\,W \\ \sim\quad & C \Rightarrow \forall x\,W \end{aligned}$$

Premislite tudi za eksistenčni kvantifikator.

Preneksna normalna oblika

Trditev

Vsako formulo lahko enakovredno zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo samo na začetku.

Formuli iz trditve pravimo **preneksna normalna oblika** dane izjavne formule.

Postopek:

1. **Preimenujemo** spremenljivke.
2. **Znebimo** se $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$, raje imamo $\neg$, $\wedge$ in $\vee$.
3. Izvlečemo **kvantifikatorje** na **začetek** z uporabo zakonov predikatnega računa.

Primer

Preoblikuj naslednjo izjavno formulo v preneksno normalno obliko:

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x)$$

Pozor - zamenjava kvantifikatojrev

Zamenjava raznovrstnih kvantifikatorjev v splošnem *ni možna*.

$$P(x,y) \quad \ldots \quad x \text{ pozna } y\text{-ona.}$$

Včasih vseeno lahko zamenjamo.

Primer

Dokaži naslednjo enakovrednost:

$$\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \sim \exists y \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$$