

Diskretne strukture

Vaje 1

1. Določi ali je izraz tautologija, protislovje oz. nevtralen.

- (a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- (b) $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(q \Rightarrow p)$
- (c) $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$
- (d) $\neg(p \Rightarrow (\neg p \vee q)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
- (e) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q))$
- (f) $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg(r \wedge q))$
- (g) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((r \Rightarrow q) \vee (\neg r \Rightarrow p))$

a)

p	q	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$		
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

1. 3. 2.

nevtralni izraz

b)

p	q	$(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(q \Rightarrow p)$			
0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

1. 2. 5. 4. 3.

tautologija

c)

p	q	$\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$			
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0

3. 2. 4. 6. 5. 4.

nevtralni izraz

d)

p	q	$\neg(p \Rightarrow (\overbrace{\neg p \vee q}^{p \Rightarrow q})) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$			
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0

4. 3. 4. 5. 2.

protislovje

e)

p	q	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q))$			
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

1. 5. 4. 3. 2.

nevtralni izraz

1)

p	q	r	$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg(r \wedge q))$			
0	0	0	0	1		
0	0	1	0	1		
0	1	0	0	1		
0	1	1	0	1		
1	0	0	0	1		
1	0	1	0	1		
1	1	0	0	1		
1	1	1	1	1	1	0 0 1
			1.	5.	4.	3. 2.

tautologija

2)

p	q	r	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((r \Rightarrow q) \vee (\neg r \Rightarrow p))$						
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
			2.	1.	7.	3.	6.	4.	5.

neutralni izraz

2. Za osnovne izjave p, q, r določi logične vrednosti. Določi še logične vrednosti za sestavljene izraze A, B, C .

p : Negacija tautologije je nevtralen izraz.

q : Konjunkcija tautologije in nevtralnega izraza je nevtralen izraz.

r : Disjunkcija tautologije in nevtralnega izraza je nevtralen izraz.

s : Če je I_1 protislovje in I_2 nevtralen izraz, potem je $I_1 \Rightarrow I_2$ tautologija.

$$A: p \vee q \wedge r \vee \neg s$$

$$B: p \Leftrightarrow q \vee r \Rightarrow s$$

$$C: (r \Rightarrow \neg q) \vee \neg(\neg r \Rightarrow q)$$

$$p \sim 0 \quad (\neg 1 \sim 0)$$

$$q \sim 1 \quad (1 \wedge N \sim N)$$

$$r \sim 0 \quad (1 \vee N \sim 1)$$

$$s \sim 1 \quad (0 \Rightarrow N \sim 1)$$

$$A = p \vee q \wedge r \vee \neg s \sim 0 \vee 1 \wedge 0 \vee \neg 1 \sim 0 \vee \underbrace{(1 \wedge 0)}_0 \vee \underbrace{\neg 1}_0 \sim 0 \vee 0 \vee 0 \sim \underline{\underline{0}}$$

$$B = p \Leftrightarrow q \vee r \Rightarrow s \sim 0 \Leftrightarrow 1 \vee 0 \Rightarrow 1 \sim 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1 \vee 0)}_1 \Rightarrow 1 \sim 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1 \Rightarrow 1)}_1 \sim 0 \Leftrightarrow 1 \sim \underline{\underline{0}}$$

$$C = (r \Rightarrow \neg q) \vee \neg(\neg r \Rightarrow q) \sim \underbrace{(0 \Rightarrow \neg 1)}_1 \vee \neg(\neg 0 \Rightarrow 1) \sim \underline{\underline{1}}$$

ni pomemben, $1 \vee A \sim 1$

3. O študentih Petru, Roku in Simonu vemo naslednje

A : Če Peter ali pa Rok študirata računalništvo, potem Simon ne študira računalništva.

B : Če Peter ali pa Simon ne študirata računalništva, potem Rok študira računalništvo.

C : Peter in Rok ali oba študirata računalništvo, ali pa nobeden ne študira računalništva.

Zgornje izjave zapiši z osnovnimi izjavami

p : Peter študira računalništvo.

r : Rok študira računalništvo.

s : Simon študira računalništvo.

in povej, kdo študira računalništvo.

$A = p \vee r \Rightarrow \neg s$
 $B = \neg p \vee \neg s \Rightarrow r$
 $C = p \Leftrightarrow r$

p	r	s	A $p \vee r \Rightarrow \neg s$			B $\neg p \vee \neg s \Rightarrow r$				C $p \Leftrightarrow r$	
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0									0
0	1	1									0
1	0	0									0
1	0	1									0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0						1

2. 4. 3. 5. 7. 6. 9. 8. 1.

Peter in Rok študirata računalništvo,
Simon pa ne.

4. Natanko ena od skrinj z oznakami A , B , C in D vsebuje zlato in natanko ena od spodnjih izjav je pravilna. V kateri skринji je zlato?

- A: Zlato je tu. $A: a$
 B: Zlato je v A ali D . $B: a \vee d$
 C: Zlata ni tu. $C: \neg c$
 D: Zlato je tu. $D: d$

- $a =$ Zlato je v skринji A .
 $b =$ Zlato je v skринji B .
 $c =$ Zlato je v skринji C .
 $d =$ Zlato je v skринji D .

a	b	c	d	$\frac{A}{a}$	$\frac{B}{a \vee d}$	$\frac{C}{\neg c}$	$\frac{D}{d}$
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1

Zlato je v B ,
 pravilna pa je izjava na
 skринji C .

natančno ena pravilna \rightarrow iščemo vrstico, kjer je
 natanko ena 1

2. način: Recimo, da je pravilna izjava na skринji B . Potem je zlato v A ali D in je zato pravilna tudi izjava na A ali D . Protislovje, ker je pravilna natanko ena izjava.

Izjava na B je tudi napačna. Sledi, da zlata ni niti v A niti v D , zato sta napačni tudi izjavi na A in D . Pravilna je torej izjava na C . Sledi, da tudi v C ni zlata, torej je zlato v B .

5. Na nekem otoku živijo samo vitezi in oprode. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo.

Srečaš tri prebivalce otoka, recimo jim A, B in C. Prebivalca A vprašaš, če je vitez ali oproda, vendar odgovor zamomlja in ga ne razumeš. Zato, logično, prebivalca B vprašaš, kaj je A rekel. "Rekel je, da je oproda," odgovori B. Nato se oglasi C in reče: "Ne verjemi mu, B laže." Kaj sta B in C? Kaj pa A?

A : ...

B : A je rekel, da je oproda.

C : B laže.

B laže, ker noben prebivalec otoka ne more trditi, da je oproda. Torej C govori resnico.

B je torej oproda, C pa vitez. Kaj je A, ne vemo.

6. Na nekem otoku živijo samo vitezi in oprode. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo.
Srečaš dva prebivalca otoka in eden od njiju reče: "Jaz sem oproda ali pa je on vitez." Kaj sta?

$$A : \neg a \vee b$$

$a = A$ je vitez.

$b = B$ je vitez.

a	b	$\neg a \vee b$	
0	0	1	×
0	1	1	×
1	0	0	×
1	1	1	✓

Isjava $\neg a \vee b$ mora biti napačna natanko tedaj, ko je $a \sim 0$. ($a \Leftrightarrow A$)

Obe sta viteza.

7. Na nekem otoku živijo samo vitezi in oprode. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo.

Srečaš tri prebivalce otoka in eden od njih reče: "Vsi smo oprode." Drugi za trenutek pomisli in izjavi: "Natanko eden od nas je vitez." Kaj so?

A: Vsi smo oprode.

$a = A$ je vitez.

B: Natanko eden od nas je vitez.

b
c
:

a	b	c	A $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$	B nt $\bar{2}$ en vitez	
0	0	0	1	0	\times $a \not\leftrightarrow A$ (A je oproda, njepova izjava pa resnična.)
0	0	1	0	1	\times $b \not\leftrightarrow B$
0	1	0	0	1	\checkmark
0	1	1	0	0	\times $b \not\leftrightarrow B$
1	0	0	0	1	\times $a \not\leftrightarrow A$ (A je vitez, izjava pa napačna.)
1	0	1	0	0	\times $a \not\leftrightarrow A$
1	1	0	0	0	\times $a \not\leftrightarrow A$
1	1	1	0	0	\times $a \not\leftrightarrow A$

B je vitez, A in C pa oprodi.

8. Na nekem otoku živijo vitezi, oprode in vampirji. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode vedno lažejo, vampirji pa podnevi lažejo in ponoči govorijo resnico. Nekoč v temni kripti ob neznanem času srečaš tri prebivalce, ki podajo naslednje izjave:

Ana: Jaz sem oproda.
Bine: Jaz sem vitez.
Cene: Jaz sem vampir.

Kaj veš o Cenetu? Ali lahko za vse tri ugotoviš, kaj so, če veš, da je med njimi natanko eden vsake vrste?

Ana mi oproda, ker ti ne govorijo resnice. Ali vitez, ker vitezi ne lažejo. Torej je Ana vampir, ki laže.
Sledimo, da je dan. Cene ni vampir, ker je to že Ana. Torej Cene laže in je oproda.
Sledi, da je Bine vitez, ker je eden vsake vrste (sicur bi lahko bil tudi oproda, ki laže, da je vitez.)