Primeri izpitnih nalog

Naloga 1

Dano je zaporedje $1, 3, 8, 7, 6, 5$, ki ga želimo nepadajoče urediti s kopico.

a) Prikaži sled gradnje kopice (postopek iz vaj). Jasno nariši in označi drevo, ki predstavlja kopico na posameznem koraku.

b) Nadaljuj postopek do konca, da dobiš urejeno zaporedje.

c) Zapiši kopico, sestavljeno iz zgornjih elementov, ki tekom samega urejanja zahteva največ pogrezanj? Prikaži sled urejanja in jasno označi pogrezanja.

d) Zapiši kopico, sestavljeno iz zgornjih elementov, ki tekom samega urejanja zahteva najmanj pogrezanj? Prikaži sled urejanja in jasno označi pogrezanja.

Naloga 2

Spodaj imate podano delno sled izvajanja algoritma za 0/1-nahrbtnik, kot smo si ga ogledali na vajah. Spomnimo, en par predstavlja eno trenutno napolnitev nahrbtnika, prva številka je zapolnjen volumen, druga pa vrednost te rešitve.

(0, 0) (__, __)
(0, 0), (3, 7) (__, __), (7, 8)
(__, __), (__, __), (__, __) (__, 5), (__, __), (12, __)
(__, __), (__, __), (__, __), (__, __) (__, __), (__, __), (__, __), (__, __)
(0, 0), (3, 7), (5, 8), (8, 15) (2, __), (5, __), (7, __), (10, __)
(0, 0), (2, 5), (3, 7), (5, 12), (7, 13), (8, 15), (10, 20)

a) Koliko predmetov je vseboval vhodni problem? Kakšne volumne in kakšne cene so imeli posamezni predmeti?

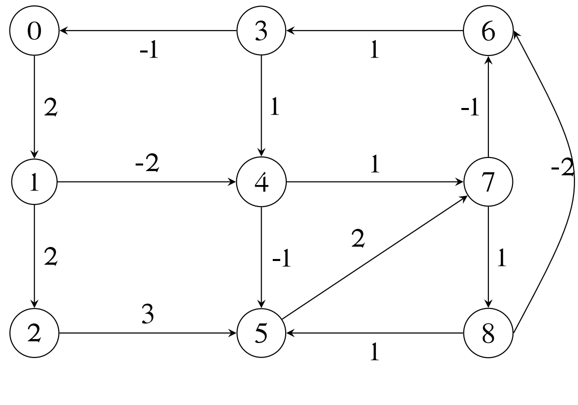
b) Kaj veš o volumnu nahrbtnika?

c) Izpolnite vse manjkajoče podatke v podani sledi.

d) Koliko znaša cena optimalno napolnjenega nahrbtnika in katere predmete vsebuje?

Naloga 3

Spodaj je podan usmerjen graf z utežmi:



a) Z Bellmann-Fordovim algoritmom izračunajte najkrajše poti od vozlišča 0 do vseh ostalih.

b) Ali graf vsebuje negativni cikel? Če ga ne vsebuje, povej kako to veš. Če ga vsebuje, ga eksplicitno zapiši.

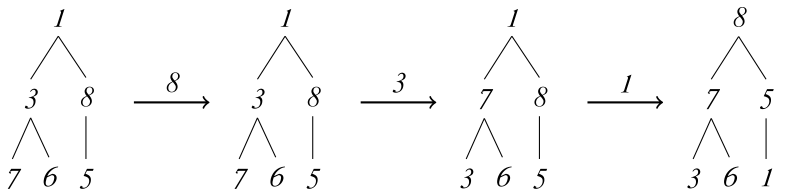
Rešitve primerov izpitnih nalog

Rešitve naloge 1

a) Pogrezamo torej elemente od prvega ne-lista proti korenu. Zaporedje tabel, ki jih dobimo po vsakem pogrezanju je sledeče:

```
1 3 8 7 6 5
1 3 8 7 6 5
1 7 8 3 6 5
8 7 5 3 6 1
```

Teh tabel vam na izpitu ni bilo potrebno pisati, dovolj je bilo, da ste narisali drevesa. Zaporedje dreves po pogrezanju treh elementov: 8, 3 in 1.



b) Zaporedje tabel (z ločenima deloma - kopico in že urejenim delom) je sledeče:

```
8 7 5 3 6 1 |
1 7 5 3 6 | 8 (pogreznemo 1)
7 6 5 3 1 | 8
1 6 5 3 | 7 8 (pogreznemo 1)
6 3 5 1 | 7 8
1 3 5 | 6 7 8 (pogreznemo 1)
5 3 1 | 6 7 8
1 3 | 5 6 7 8 (pogreznemo 1)
3 1 | 5 6 7 8
| 1 3 5 6 7 8
```

c) Prejšnji primer je najslabši možen za število pogrezanj pri urejanju. Vedno namreč pogrezamo element 1, ki ga moramo potisniti do zadnjega nivoja, kar je največ. Sled z eksplicitno preštetim številom pogrezanj je:

```
8 7 5 3 6 1 |
1 7 5 3 6 | 8 (pogreznemo 1 za 2)
7 6 5 3 1 | 8
1 6 5 3 | 7 8 (pogreznemo 1 za 2)
6 3 5 1 | 7 8
1 3 5 | 6 7 8 (pogreznemo 1 za 1)
5 3 1 | 6 7 8
1 3 | 5 6 7 8 (pogreznemo 1 za 1)
3 1 | 5 6 7 8
| 1 3 5 6 7 8
```

Skupaj je torej 6 pogrezanj.

d) Najboljši možen primer je kopica:

```
  8
 / \
5   7
/\  |
1 3 6
```

Urejanje bi izgledalo takole:

```
8 5 7 1 3 6 |
6 5 7 1 3 | 8 (pogreznemo 6 za 1)
7 5 6 1 3 | 8
3 5 6 1 | 7 8 (pogreznemo 3 za 1)
6 5 3 1 | 7 8
1 5 3 | 6 7 8 (pogreznemo 1 za 1)
5 1 3 | 6 7 8
3 1 | 5 6 7 8 (3 ne rabimo pogrezat)
3 1 | 5 6 7 8
| 1 3 5 6 7 8
```

Skupaj torej 3 pogrezanja. Kako pridete do tega rezultata? Poglejmo si najprej "nasilen" način, pozneje pa bomo povedali trik, ki vam to preiskovanje bistveno olajša. Najprej morate videti, da sploh ni tako veliko možnih kopic, zato lahko preizkusite praktično vse. Opazk3: 1) 8 je vedno v korenu, 2) 7 mora biti vedno na drugem nivoju, 3) poleg nje pa so lahko 5,6 ali 3. Če je 3 na drugem nivoju (poleg 7) imam na voljo samo dve kopici:

```
  8        8
 / \      / \
7   3    7   3
/\  |    /\  |
5 6 1    6 5 1
```

Če je na drugem nivoju 5, potem imam najprej možnost da je 5 koren desnega poddrevesa

```
  8        8        8        8
 / \      / \      / \      / \
7   5    7   5    7   5    7   5
/\  |    /\  |    /\  |    /\  |
1 6 3    6 1 3    6 3 1    3 6 1
```

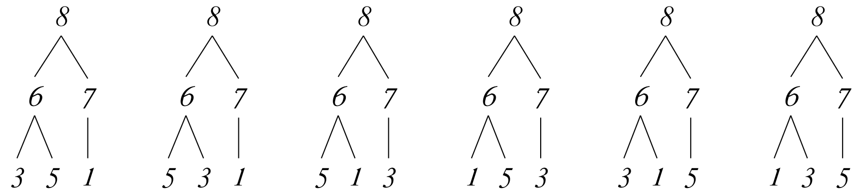
Nato pa da je 5 koren levega poddrevesa:

```
  8        8
 / \      / \
5   7    5   7
/\  |    /\  |
1 3 6    3 1 6
```

Nazadnje poglejmo še primer, ko je 6 na drugem nivoju kopice:
Najprej kot koren desnega poddrevesa

```
  8        8        8        8        8        8
 / \      / \      / \      / \      / \      / \
7   6    7   6    7   6    7   6    7   6    7   6
/\  |    /\  |    /\  |    /\  |    /\  |    /\  |
3 5 1    5 3 1    5 1 3    1 5 3    3 1 5    1 3 5
```

Nato še levega poddrevesa



Te kopice lahko potem preverite in vidite, da je najboljša možnost enaka 3 pogrezanja. Seveda pa do podobnega rezultat pridete tudi na bolj enostaven način in sicer lahko povemo koliko najmanj je pogrezanj potrebnih, nato pa najdemo tako kopico, ki potrebuje toliko pogrezanj. V našem primeru je to 3 - zato ker imamo 3 elemente na tretjem nivoju kopice. Vsak izmed teh elementov bo pogreznjen vsaj za 1, ker je manjši vsaj od enega elementa na drugem nivoju. Kopica, ki to doseže, pa je tista prva. Za vajo povejte še, koliko je različnih kopic, ki dosežejo tri pogrezanja.

Rešitve naloge 2

a) *Problem je vseboval 5 predmetov, to je razvidno iz sledi, saj smo 5x dodajali predmete.*

b) *Volumen nahrbtnika je bodisi 10 ali 11. To sledi iz te tabele. Namreč, vsaj 10 mora biti zaradi zadnje vrstice, ker vsebuje rešitev, ki ima volumen 10. V sledi pa so tudi rešitve, ki imajo volumen 12, pa so bile izrezane, kljub temu, da so imele višjo ceno od ostalih z nižjim volumnom.*

c) *Izpolnjena tabela z namigi za reševanje je:*

$(0,0)$ $(3,7)$ `(to ugotovimo iz naslednje vrstice)`
$(0,0),(3,7)$ $(4,1),(7,8)$ `(7,8)-(3,4) = (4,1)`
$(0,0),(3,7),(7,8)$ `prepišemo in režemo` $(5,5),(8,12),(12,13)$ `ceno ugotovimo 5-0, volumen pa 12-7`
$(0,0),(3,7),(7,8),(8,12)$ `prepišemo in režemo (12,13) zaradi volumna` $(5,8),(8,15),(12,16),(13,20)$ `iz naslednje vrstice sklepamo, da je predmet (5,8)`
$(0,0),(3,7),(5,8),(8,15)$ `prepišemo in režemo` $(2,5),(5,12),(7,13),(10,20)$ `iz zadnje vrstice vidimo, da je predmet (2,5)`
$(0,0),(2,5),(3,7),(5,12),(7,13),(8,15),(10,20)$

d) *Sledimo iz optimalne rešitve (10, 20) nazaj po tabeli in dobimo, da so v nahrbtniku predmeti 5 (2,5), 4 (5,8) in 1 (3,7).*

Rešitve naloge 3

a) *Sled algoritma je sledeča:*

0: $0,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty$
1: $0,2,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty$
2: $0,2,4,\infty,0,\infty,\infty,\infty,\infty$
3: $0,2,4,\infty,0,-1,\infty,1,\infty$
4: $0,2,4,\infty,0,-1,0,1,2$
5: $0,2,4,1,0,-1,0,1,2$
6: $0,2,4,1,0,-1,0,1,2$
7: $0,2,4,1,0,-1,0,1,2$
8: $0,2,4,1,0,-1,0,1,2$
(lahko bi se ustavili tudi v iteraciji 6 in povedali, da se ni nič spremenilo, zato se tudi naprej ne bo nič spremenilo)

b) *Graf ne vsebuje negativnega cikla, ker bi se pot nenehno zmanjševala, tudi če bi izvedli iteracijo 9. Vidimo pa, da ni nobene spremembe vse od iteracije 5 naprej, zato vemo, da negativnega cikla ni.*