1. Prepričaj se, da sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

podobni. Kako bi poiskal matriko P, da bo $B = P^{-1}AP$?

Rešitev: A in B sta podobni, ker sta obe podobni $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Primer za $P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Ali je matrika

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

podobna diagonalni matriki? Zakaj (ne)?

Rešitev: Ne, pri (dvakratni) lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ je dimenzija lastnega podprostora $1 = \dim(N(A-2I))$, tj. algebraična večkratnost ene od lastnih vrednosti ni enaka njeni geometrični večkratnosti.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

(b) Če obstaja, poišči matriko P, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna matrika.

(c) Izračunaj A^{2020}.

Rešitev: (a) $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$. (b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $A^{2020} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Dana je matrika

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike J.

(b) Izberi lastne vektorje matrike J tako, da bodo paroma pravokotni (če že niso), nato pa ...

(c) ... poišči še ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$, ki jo tvorijo lastni vektorji matrike J.

(d) Zapiši $J = VDV^{\mathsf{T}}$, kjer je D diagonalna, V pa ortogonalna matrika.

Rešitev: (a) Lastne vrednosti: $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 4$, pripadajoči lastni vektorji $\mathbf{v}_1 = [-1,0,1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = [0,1,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_3 = [1,0,1]^\mathsf{T}$. (b) So že paroma pravokotni. (c) Ortonormirano bazo tvorimo iz lastnih vektorjev $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1,0,1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2 = [0,1,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^\mathsf{T}$. (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $V = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

   (b) Zapiši spektralni razcep matrike A – izrazi A kot linearno kombinacijo matrik pravokotnih projekcij.

Rešitev: (a) $B_{\mathbb{R}^4} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
(b) $A = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^\mathsf{T} + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^\mathsf{T} + 5\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^\mathsf{T} + 9\mathbf{q}_4\mathbf{q}_4^\mathsf{T}$.

6. Recimo, da lastni vektorji realne $n \times n$ matrike A tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je A simetrična, tj. $A^\mathsf{T} = A$.

7. Naj bo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor in $H = I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T}$.

   (a) Preveri, da je $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike H. Kateri lastni vrednosti pripada?

   (b) Poišči/opiši lastne podprostore za ostale lastne vrednosti matrike H.

   (c) Kaj mora dodatno veljati za $\mathbf{x}$, da bo H matrika zrcaljenja?

Rešitev: (a) $H\mathbf{x} = (I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T})\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (1 - 2\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x}$ pripada lastna vrednost $1 - 2\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. (c) $\|\mathbf{x}\| = 1$.