

1. NOVO DEFINIRANI POJMI

- Lastne vrednosti matrike se ne ohranjajo z Gaussovo eliminacijo, video.
- *Podobnost matrik.*
 - Definicija. Matriki A in B sta *podobni*, če velja $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P , video.
 - Podobnost je ekvivalenčna relacija.
 - ⚡ Naloga 1: Pokažite, da če je matrika A podobna matriki B , potem je matrika A^3 podobna matriki B^3 .
 - Podobni matriki imata enak karakteristični polinom, video.
 - Obrat ne velja: obstajajo matrike z enakim karakterističnim polinomom, ki pa niso podobne, video.
 - Če sta si matriki A in B podobni, potem
 - * imata enake lastne vrednosti,
 - * $\det(A) = \det(B)$,
 - * $\text{sled}(A) = \text{sled}(B)$ in
 - * $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.
 - * video.
- *Diagonalizacija matrik.*
 - Definicija. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *diagonalizabilna*, če je podobna kakšni diagonalni matriki. T.j., če obstajata takšna diagonalna matrika $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in takšna obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da velja $A = PDP^{-1}$, video.
 - Primer nediagonalizabilne matrike, video
 - Če je matrika A diagonalizabilna in $A = PDP^{-1}$, potem so
 - * diagonalni elementi matrike D natanko lastne vrednosti matrike A ,
 - * stolpci matrike P natanko lastni vektorji matrike A (zapisani v pripadajočem vrstnem redu lastnih vrednosti v matriki D).
 - * video.
 - Matriko A je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko lahko najdemo bazo prostora \mathbb{R}^n , sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A . (Torej natanko tedaj, ko je večkratnost vsake lastne vrednosti λ kot ničle karakterističnega polinoma matrike A enaka dimenziji pripadajočega lastnega podprostora $\dim N(A - \lambda I)$.) video.
 - ⚡ Naloga 2: Naj bo matrika A diagonalizabilna. Pokažite, da je rang matrike A enak številu njenih neničelnih lastnih vrednosti.
 - Še en primer nediagonalizabilne matrike, video.

- Ali je matrika $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonalizabilna? (Rešitev.)
- Računanje potenc diagonalizabilnih matrik, video.
- *Lastne vrednosti in lastni vektorji simetričnih matrik*
 - Lastne vrednosti simetričnih matrik so realne.
 - Lastni vektorji simetričnih matrik tvorijo ortonormirano bazo prostora \mathbb{R}^n , video.
- ⚡ Naloga 3: Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - x^3$.
 - (A) Določite vse lastne vrednosti matrike A .
 - (B) Izračunajte $\dim N(A)$.
 - (C) Naj bo $\vec{v} = [1, 0, 0, 1]^T$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti 1. Zapišite vsaj en lastni vektor \vec{w} pri lastni vrednosti 0.
- Spektralni razcep simetričnih matrik, video.
- Zapiski predavanj, 13. teden.

2. KJE SI LAHKO PREBEREM/OGLEDAM SNOV?

- (1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.3 (brez 6.3.2) in 6.4 (brez 6.4.2).
- ★ (2) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra, Lastne vrednosti in lastni vektorji, in Sebiadjungirane, ortogonalne in normalne preslikave, študijsko gradivo, 2007.
- (3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Sections 6.2, 6.4 in 6.6.
- (4) Gilbert Strang, Video Lectures:
 - Lecture 22: Diagonalization and powers of A ,
 - Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (prvih 29 minut),
 - Lecture 28: Similar matrices and jordan form (prvih 31 minut).

3. ALI RAZUMEM SNOV?

- ⚡ (1) Denimo, da sta si matriki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ podobni. Pokažite, da sta si tedaj tudi $A + I_n$ in $B + I_n$ podobni.
- ⚡ (2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike AA^T realne in nenegativne. (Namig: Če je $AA^T \vec{x} = \lambda \vec{x}$, potem enakost z leve pomnožite z vrstico \vec{x}^T . Poglejte, kako lahko s pomočjo dolžin zapišete levo in kako desno stran.)

⚡ (3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 1 je enak $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, lastni vektor pri lastni vrednosti 2

pa $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zapišite lastni vektor pri lastni vrednosti 3.

⚡ (4) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simetrična matrika z dvojno lastno vrednostjo -1 in njej pripadajočima lastnima vektorjema $\vec{v} = [0, 1, 1]^T$ ter $\vec{u} = [1, 1, 0]^T$.

(a) (5 točk) Izračunajte $A^{2021} \vec{v}$.

(b) (5 točk) Ali lahko kaj poveste o lastni vrednosti $\lambda_3 \neq -1$ matrike A ? Ali lahko kaj poveste o lastnem vektorju, ki pripada λ_3 ?

⚡ (5) Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Izračunajte $\text{rank}(A + I)$.

⚡ (6) Denimo, da je matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična ter $A = B^2$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike A nenegativne.

⚡ (7) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protiprimer.

(a) Če je matrika A diagonalizabilna, potem je tudi obrnljiva.

(b) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n različnih lastnih vrednosti.

(c) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n realnih lastnih vrednosti.

(d) Vsaka simetrična matrika je diagonalizabilna.

(e) Vsaka simetrična matrika je obrnljiva.

(f) Lastni vektorji $n \times n$ simetrične matrike z večkratnimi lastnimi vrednostmi ne tvorijo baze \mathbb{R}^n .

(g) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizabilna, potem je vsak vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lastni vektor matrike A .

(h) Matrika $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ima edini lastni vrednosti enaki 1 in -1 . Če je $\text{rank}(A + I) = 1$, potem je A diagonalizabilna.

(i) Matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ je diagonalizabilna.

⚡ (8) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.

(a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^T$ simetrična matrika.

(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^T$ matrika ranga 1.

(c) Pokažite, da je vektor \vec{a} lastni vektor matrike $\vec{a}\vec{a}^T$. Določite pripadajočo lastno vrednost.

(d) Zapišite vse lastne vrednosti matrike $\vec{a}\vec{a}^T$.

(e) Naj bo \vec{a} lastni vektor simetrične matrike A . Pokažite, da matriki A in $\vec{a}\vec{a}^T$ komutirata.

★ (9) S pomočjo matematične indukcije na velikost matrike n pokažite, da velja naslednji izrek: Naj bo A poljubna $n \times n$ realna matrika z lastnimi vrednostmi

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potem obstaja takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je

$$Q^T A Q = T,$$

kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(a) Najprej pokažite, da trditev velja za $n = 1 \odot$.

(b) Predpostavite, da trditev velja za nek n . Naj bo $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$. Izberite lastno vrednost λ_1 in pripadajoči lastni vektor v dolžine 1. Naj bo U poljubna ortogonalna matrika, ki ima prvi stolpec enak v .

(i) Pokažite, da je $v^T A v = \lambda_1$.

(ii) Pokažite, da je $U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & u^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

(iii) Uporabite indukcijsko predpostavko na $n \times n$ matriki B : $R^T B R = T_n$.

(iv) Definirajte $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ ter $Q = U S$ in pokažite, da je Q ortogonalna matrika, za katero je $Q^T A Q = T$, kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi lastnim vrednostim matrike A .

⚡(10) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 85-86, 88-89, 92-95, 97, 99, 101.

(Naloge, označene s ⚡ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s ⋆, pa dopolnjuje obravnavano snov in širi vaše znanje.)