Linearna algebra	6. teden

Baze vektorskih podprostorov. Ničelni in stolpčni prostor matrike.

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Kot uvod v teden si poglejte 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Linear combinations, span, and basis vectors. Nekatere reči že znate, preostale se boste naučili danes.
- *Baza vektorskega prostora*
  - Definicija, video.
  - Primer, video1 + video2.
  - Lastnosti baze:
    * Vsak vektorski prostor ima neskončno baz.
    * Vse baze vektorskega prostora imajo enako število elementov.
  - Število elementov v (katerikoli) bazi vektorskega prostora V imenujemo *dimenzija* vektorskega prostora V, video.
  - Dimenzija vektorskega prostora V je torej:
    * največje število linearno neodvisnih vektorjev, ki jih lahko najdemo v V,
    * najmanjše število vektorjev, ki jih potrebujemo da bo V njihova linearna ogrinjača.

    video.
  - V vektorskem prostoru V z izbrano bazo $\mathcal{B}$ lahko vsak vektor izrazimo na en sam način kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$, video.
  - Primer: Napišite, kaj so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ dimenzije 1, 2 ali 3. (Rešitev)
  - *Standardna baza* $\mathbb{R}^n$, video.
  - ↯ Naloga 1: Naj bo U linearna ogrinjača vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Kdaj vektorji $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ tvorijo bazo prostora U?
- *Stolpčni prostor*, definicija in primer, video.
- Rang matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je enak:
  - številu neničelnih vrstic v vrstično stopničasti obliki matrike A,
  - številu pivotov v vrstično stopničasti obliki matrike A,
  - številu linearno neodvisnih vrstic matrike A,
  - številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A,
  - dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ matrike A,
  - $\operatorname{rang} A = n - \dim N(A)$.

  Argumente najdete v videu.
- Iz prejšnje točke sledi

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^{\mathsf{T}}.$$

- ϟ Naloga 2: Naj bo A neničelna matrika velikosti 3×8 in $d = \dim N(A)$. Zapišite vse možne vrednosti števila d.
- Iz vsega, kar ste se naučili v zadnjih štirih tednih tako sledi, da so naslednje trditve o matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ekvivalentne:
  (1) A je obrnljiva.
  (2) Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev $x = 0$.
  (3) Sistem enačb $Ax = b$ ima enolično rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.
  (4) Reducirana vrstična stopničasta oblika matrike A je I.
  (5) Rang matrike A je n.
  (6) Stolpci matrike A so linearno neodvisni.
  (7) Vrstice matrike A so linearno neodvisne.
  (8) Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
  (9) Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
  (10) Stolpci matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
  (11) Vrstice matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
  (12) $\dim N(A) = 0$.
  (13) $\dim C(A) = n$.
- Zapiski predavanj, 6. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 3.4. poglavje VI.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 3.
(4) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 6: Column space and nullspace.
  (b) Lecture 9: Independence, basis, and dimension.
⋆ (5) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra.

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ štiri linearno neodvisne vrstice. Koliko rešitev ima lahko linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$?
ϟ(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika, katere stolpci so linearno neodvisni. Izračunajte $\dim N(A)$.
ϟ(3) Če je $A \in \mathbb{R}^{7\times 11}$ matrika ranga 5, izračunajte $\dim N(A)$.
ϟ(4) Pokažite, da če za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $\dim N(A) \leq \dim N(B)$, potem je $\dim C(A) \geq \dim C(B)$.
ϟ(5) Pokažite, da za kvadratno matriko A velja $\dim N(A) = \dim N(A^{\mathsf{T}})$.
ϟ(6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55, 57 (a) in (b), 60-64.

(Naloge, označene s ↯ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)