Linearna algebra **Teden 5**

Vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- *Vektorski podprostor*
  - Definicija vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^n$, video.
    - Primer: Ali je množica $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & -y & -x \end{bmatrix}^{\mathsf{T}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$? (Rešitev.)
  - Ekvivalentna definicija vektorskega podprostora, video.
    - Za dano matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je množica
      $$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$$
      vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Ta prostor imenujemo *ničelni prostor* matrike A (in je zelo pomemben prostor, ki ga bomo srečevali skozi cel semester).
    - Primer: Izračunajte ničelni prostor matrike $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. (Rešitev.)
    - ↯ Naloga 1: Utemeljite, zakaj množica $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a^2 & b \end{bmatrix}^{\mathsf{T}};\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>ni</u> vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$ (čeprav vsebuje $\vec{0}$).
    - ↯ Naloga 2: Kaj mora veljati za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, da bo ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $ax + by + cz = d$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?
  - *Linearna ogrinjača*, definicija in primeri, video.
  - *Linearna neodvisnost*
    - Definicija, video.
    - ↯ Naloga 3: Naj bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni. Pokažite, da so linearno neodvisni tudi vektorji $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ in $\vec{a}+\vec{c}$.
- *Baza vektorskega prostora*
  - Definicija, video.
  - Primer, video1 + video2.
  - Lastnosti baze:
    - Vsak vektorski prostor ima neskončno baz.
    - Vse baze vektorskega prostora imajo enako število elementov.

  Število elementov v (katerikoli) bazi vektorskega prostora V imenujemo *dimenzija* vektorskega prostora V, video.

  Dimenzija vektorskega prostora V je torej:
    - največje število linearno neodvisnih vektorjev, ki jih lahko najdemo v V,

    - $*$ najmanjše število vektorjev, ki jih potrebujemo da bo V njihova linearna ogrinjača.

  video.
  - V vektorskem prostoru V z izbrano bazo $\mathcal{B}$ lahko vsak vektor izrazimo na en sam način kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$, video.
  - Primer: Napišite, kaj so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ dimenzije 1, 2 ali 3. (Rešitev)
  - *Standardne baze* v $\mathbb{R}^n$, video.
  - ϟ Naloga 4: Naj bo U linearna ogrinjača vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Kdaj vektorji $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ tvorijo bazo prostora U?
- Zapiski predavanj 2019/20, 5. teden in Zapiski predavanj 2019/20, 6. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor, Poglavje 1.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelki 3.1.-3.4.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 3.
$\star$ (4) (Za zahtevnejše bralce) Vektorski prostor lahko definirate tudi bolj algebraično. Pokukajte v učbenik Tomaža Koširja: Linearna algebra, za definicijo in lastnosti vektorskih prostorov poglejte v poglavje VI. Večino pojmov, ki so vam tuji, boste našli v poglavju V.

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Drži ali ne drži?
  (a) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
  (b) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.
  (c) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v $\mathbb{R}^9$ vsebuje vsaj 9 elementov.
  (d) Če sta prvi in drugi stolpec matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linearno odvisna vektorja, potem matrika A ni obrnljiva.
  (e) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

ϟ(2) Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^n$?
  (a) Vsi vektorji dolžine 1.
  (b) Vsi vektorji, ki so pravokotni na vektor $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
  (c) Vsi vektorji, ki niso kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
  (d) Vsi vektorji, ki so kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
  (e) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je neničelna.
  (f) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je ničelna.

ϟϟ(3) Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^n$. Pokažite, da je tudi $U \cap V$ vektorski prodprostor v $\mathbb{R}^n$.

ϟ(4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55 (a,b), 59(a), 68 (a).

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s ϟϟ pa je malce bolj zahtevna.)