Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 1. poskusni kolokvij

8. april 2020

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani sta premici

$$p\colon \frac{x-1}{2} = y = \frac{6-z}{3} \qquad \text{in} \qquad q\colon x-2 = \frac{y+1}{3} = z+3.$$

a) (8) Poišči enačbo ravnine Σ, ki je vzporedna premici p in vsebuje premico q.

Rešitev: Normala ravnine Σ bo pravokotna na smerna vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$, zato bo vzporedna vektorskemu produktu

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Naj bo torej $\vec{n} = [2, -1, 1]^{\mathsf{T}}$. Za točko na ravnini lahko izberemo katerokoli točko s premice q, na primer $Q(2, -1, -3)$. Potem je

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_Q = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 = 2$$

in iskana enačba ravnine je

$$\Sigma\colon 2x - y + z = 2.$$

b) (9) Točko $A(1, 0, 6)$ projiciraj na ravnino Σ v točko A'.

Rešitev: Ker je

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + k \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2k \\ -k \\ 6+k \end{bmatrix} \in \Sigma,$$

velja

$$2(1+2k) - (-k) + (6+k) = 2,$$

od koder dobimo $k = -1$. Sledi, da je $\vec{r}_{A'} = [-1, 1, 5]^{\mathsf{T}}$, zato je rešitev $A'(-1, 1, 5)$.

c) (8) Poišči parametrično enačbo premice p', ki je projekcija premice p na ravnino Σ.

Rešitev: Premica p' vsebuje točko A' in ima smerni vektor $\vec{p}$, zato je njena enačba

$$p'\colon \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

2. naloga (25 točk)

Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ a & b & a-b \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

a) (5) Pri kakšnih vrednostih parametrov a in b je matrika A obrnljiva?

Rešitev: Matrika A mora biti polnega ranga. Preverimo za katere vrednosti parametrov a in b to velja. Odgovor dobimo po prvem koraku Gaussove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ a & b & a-b \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & b-a & a-b-ab \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Da bi matrika A imela poln rang, vsa števila na glavni diagonali morajo biti različna od 0. Lahko sklepamo, da je matrika A obrnljiva, če veljata dva pogoja:

$$b \neq a \quad \text{in} \quad b \neq 0.$$

b) (11) Za parametra a in b izberi **najmanjšo celoštevilsko dopustno nenegativno vrednost** pri katerih je matrika A obrnljiva in izračunaj inverz matrike A.

Rešitev: Izberemo $a = 0$ in $b = 1$ ter izračunamo inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\left[\, A \mid I \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] = \left[\, I \mid A^{-1} \,\right].$$

c) (9) Reši matrično enačbo $AX - A + 2I = 0$.

Rešitev: Enačbo lahko zapišemo v obliki

$$X = A^{-1}(A - 2I)$$

in poenostavimo v

$$X = I - 2A^{-1}.$$

Rešitev matrične enačbe je:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. V vektorskem prostoru vseh 2×2 matrik, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, opazujemo podmnožici

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A\vec{a} = 2\vec{a}\}$$
$$\text{in} \quad V := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A\vec{a} = A^{\mathsf{T}}\vec{a}\}.$$

a) (5) Za matriki $X = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ter $Y = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ugotovi ali sta vsebovani v U oziroma V.

Rešitev: Ker je

$$X\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{a},$$

je $X \in U$. Iz

$$X^{\mathsf{T}}\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = X\vec{a}$$

sklepamo, da $X \notin V$. Podoben račun pokaže, da je $Y \notin V$ in $Y \in V$.

b) (12) Katera (kateri) od zgornjih podmnožic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ je vektorski podprostor? Če je podprostor, utemelji zakaj je. Če ni podprostor, utemelji zakaj ni.

Rešitev: Naj bo O 2×2 matrika samih ničel. Potem je $O\vec{a} = \vec{0} \neq 2\vec{a}$, zato $O \notin U$ in U ni vektorski podprostor. Za vse $X, Y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ pa velja

$$(X+Y)\vec{a} = X\vec{a} + Y\vec{a} = X^{\mathsf{T}}\vec{a} + Y^{\mathsf{T}}\vec{a} = (X^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}})\vec{a} = (X+Y)^{\mathsf{T}}\vec{a}$$

in

$$(\alpha X)\vec{a} = \alpha(X\vec{a}) = \alpha(X^{\mathsf{T}}\vec{a}) = (\alpha X^{\mathsf{T}})\vec{a} = (\alpha X)^{\mathsf{T}}\vec{a},$$

zato je Y vektorski podprostor.

c) (8) Za tisto (tisti) podmnožico, ki je podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ poišči bazo in določi dimenzijo.

Rešitev: Vemo, da je V vektorski podprostor. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Potem je $A\vec{a} = [a+2b, c+2d]^{\mathsf{T}}$ in $A^{\mathsf{T}}\vec{a} = [a+2c, b+2d]^{\mathsf{T}}$ in iz $A\vec{a} = A^{\mathsf{T}}\vec{a}$ dobimo sistem

$$a + 2b = a + 2c,$$
$$c + 2d = b + 2d,$$

ki je rešljiv pri pogoju $c = b$ za poljubne parametre a, b in d. Torej

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ena možna baza za V je torej $\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ in $\dim(V) = 3$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) (12) Koliko sta dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ in ničelnega prostora $N(A)$? Poišči bazi za oba podprostora.

Rešitev: Po Gaussovi eliminaciji za matriko A dobimo

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobimo dva pivota (torej je $dim(C(A)) = 2$) in dve prosti spremenljivki (torej je tudi $dim((N(A)) = 2)$. Za bazo za $C(A)$ lahko vzamemo $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ (prva dva stolpca matrike A), za bazo za $N(A)$ pa lahko vzamemo $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\} = \{[4, -3, 1, 0]^\mathsf{T}, [3, -2, 0, 1]^\mathsf{T}\}$

b) (6) Z $\vec{a}_i$ označimo i-ti stolpec matrike. Izrazi stolpec $\vec{a}_3$ kot linearno kombinacijo stolpcev $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$.

Rešitev: Iz zgornje reducirane oblike matrike A lahko preberemo

$$\vec{a}_3 = -4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$$

c) (7) Koliko je dimenzija prostora $C(A) \cap N(A)$? Določi bazo za $C(A) \cap N(A)$.

Rešitev: Če za bazo $C(A)$ vzamemo $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ in za bazo $N(A)$ vzamemo $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$, lahko odgovore dobimo z Gaussovo eliminacijo na matriki $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{n}_1 & \vec{n}_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Od tod ugotovimo, da je $\dim(C(A) + N(A)) = 3$ in $\dim(C(A) \cap N(A)) = 1$. Iz reducirane oblike lahko izrazimo $\vec{n}_2$ kot linearno kombinacijo

$$\vec{n}_2 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{n}_1$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$\vec{n}_2 - \vec{n}_1 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$$

Ker je na levi strani očitno vektor iz $N(A)$, na desni strani pa vektor iz $C(A)$, je dobljen vektor v preseku $C(A) \cap N(A)$. Za bazni vektor lahko potem vzamemo $\vec{n}_2 - \vec{n}_1 = [-1, 1, -1, 1]^\mathsf{T}$.