TEORETIČNI DEL

1. (5 točk) Naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dolžin $||\vec{a}|| = 2$, $||\vec{b}|| = 1$, in naj oklepata kot $\frac{\pi}{6}$. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a}+\vec{b}$ ter $\vec{a}-\vec{b}$.

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b} \text{ (distributivnost)}\\ &= ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2 \text{ (simetričnost skalarnega produkta)}\\ &= 4-1=3\end{aligned}$$

(Opomba pri točkovanju: Če ste se zmotili pri računanju 2^2-1^2, ste vseeno prejeli 5 točk. Za računanje vektorskega produkta: 0 točk. Za računanje $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = ||\vec{a}+\vec{b}||| \cdot ||\vec{a}-\vec{b}|| \cos\frac{\pi}{4}$: 0 točk.)

2. (5 točk) Naj za obrnljivi matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $(AB)^2 = A^2B^2$. Pokažite, da matriki A in B komutirata, torej, da je $AB = BA$.

Najprej pogoj $(AB)^2 = A^2B^2$ razpišemo v $ABAB = AABB$. Ker sta A in B obrnljivi matriki, lahko enakost z leve množimo z A^{-1} in z desne z B^{-1}. Tako dobimo $BA = AB$.
(Opomba pri točkovanju: Če ste iz predpostavke $AB = BA$ pokazali, da velja $(AB)^2 = A^2B^2$, niste prejeli točk.)

3. (5 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dana matrika. Ali je množica vseh realnih $n\times n$ matrik X, za katere velja $AX = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$?

Da. Naj bosta $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za kateri velja $AX = 0$ in $AY = 0$. Za vsaki realni števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = 0 + 0 = 0,$$

torej tudi za linearno kombinacijo $\alpha X + \beta Y$ velja $A(\alpha X + \beta Y) = 0$.
(Opomba pri točkovanju: Če ste napisali, da je prostor enak $N(A)$, ste prejeli 2.5 točke. Vsak stolpec matrike X je namreč iz $N(A)$.)

4. (10 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{9\times 11}$ matrika ranga 7. Izračunajte (z utemeljitvijo):

A. $\dim N(A)$

Ker je $\operatorname{rang}(A) = 7$, je $\dim N(A) = 11 - 7 = 4$.

B. $\dim C(A^\mathsf{T})$

$\dim C(A^\mathsf{T}) = \operatorname{rang}(A^\mathsf{T}) = \operatorname{rang}(A) = 7$.

Ali pa $\dim C(A^\mathsf{T}) = \dim N(A)^\perp = 11 - \dim N(A) = 11 - 4 = 7$.

C. najmanjšo singularno vrednost matrike A.

Vse singularne vrednosti matrike A so nenegativna števila in enaka korenom lastnih vrednosti matrike $AA^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$. Matrika $AA^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ ni obrnjiva, saj matrika A ni polnega ranga. Zatorej ima vsaj eno lastno vrednost enako 0. Sledi, da je najmanjša lastna vrednosti matrike A enaka 0.

(Opomba pri točkovanju: A. in B. del sta bila vredna 5 točk, C. del 5 točk.)

5. (5 točk) Zapišite primer takšnih linearno neodvisnih vektorjev $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ in takšne neničelne linearne preslikave $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ali njene matrike), da bosta $\varphi(\vec{a})$ ter $\varphi(\vec{b})$ linearno odvisna vektorja.

Najpogostejši primeri dobrih preslikav in vektorjev:

- φ je projekcija na x-os, $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$.
- $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$, φ ima matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ v standardni bazi.
- $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$, φ ima matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ v standardni bazi.

(Opomba pri točkovanju: Če niste poračunali $\varphi(a)$ ter $\varphi(b)$ in ugotovili, da sta linearno odvisna, ste prejeli 7.5 točke.)

6. (5 točk) Zapišite primer takšne obrnljive matrike $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, katere stolpci so paroma ortogonalni in ne velja $P^{-1} = P^T$.

Zapišete lahko poljubno 3×3 matriko s paroma ortogonalnimi stolpci, ki pa niso dolžine 1. Denimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Opomba pri točkovanju: Potrebno je bilo utemeljiti, da je $P^{-1} = P^T$ (bodisi, da P nima ortogonalnih stolpcev, bodisi ste eksplicitno izračunali). Če tega niste utemeljili, ste dobili 7.5 točke. Če ste napisali primer matrike P, ki nima paroma ortogonalnih stolpcev, utemeljili pa, da velja vse ostalo, ste dobili 2.5 točke.)

7. (5 točk) Če za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $A^2 = 0$, potem pokažite, da je 0 edina lastna vrednost matrike A.

Naj bo λ lastna vrednost matrike A.

- Potem je λ^2 lastna vrednost matrike $A^2 = 0$. Ker ima ničelna matrike vse lastne vrednosti enake 0, je $\lambda^2 = 0$, torej $\lambda = 0$.
- (Ali pa na dolgo) Naj bo neničelni vektor $\vec{x}$ lastni vektor matrike A, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Če enakost z obeh strani pomnožimo z leve z A, dobimo $A^2(\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x})$, torej $\vec{0} = \lambda^2\vec{x}$ in ker je $\vec{x}$ neničelni vektor, je $\lambda^2 = 0$, torej tudi $\lambda = 0$.

8. (5 točk) Denimo, da sta si matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobni. Pokažite, da sta si tedaj tudi $A + I_n$ in $B + I_n$ podobni.

Naj bo $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P. Potem je

$$A + I_n = PBP^{-1} + I_n = P(B + I_n)P^{-1},$$

torej sta si tudi matriki $A + I_n$ in $B + I_n$ podobni.
(Opomba pri točkovanju: Če ste iz $A = P(B + I_n)P^{-1}$ pokazali, da velja $A = PBP^{-1}$, ste dobili 2.5 točk. Argumenti z determinantami, sledjo, diagonalizacijo niso zadostni za podobnost, zato niste prejeli točk.)

9. (5 točk) Zapišite primer nesimetrične obrnljive matrike $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, za katero velja $\operatorname{rang}(C+I) = \operatorname{rang}(C-I) = 3$ ter $\operatorname{rang}(C+2I) = \operatorname{rang}(C-2I) = 4$.

Zapišemo lahko poljubno nesimetrično 4×4 matriko, ki ima lastni vrednosti 1 in -1 (saj $\operatorname{rang}(C+I) = \operatorname{rang}(C-I) = 3$), nima pa lastnih vrednosti 0 (obrnljivost), 2 in -2 ($\operatorname{rang}(C+2I) = \operatorname{rang}(C-2I) = 4$). Denimo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(Opomba pri točkovanju: Če ste zapisali matriko z dvojno lastno vrednostjo 1 in dvojno lastno vrednostjo -1 in za katero so veljale vse omejitve (pa tega niste preverili), ste prejeli 7.5 točke. Če ste napisali nesimetrično matriko, za katero so veljale vse omejitve, ste prejeli 7.5 točke.)