

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

## 2. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL

### 13. junij 2022

(Na teoretičnem delu je 9 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (10 točk) Naj za neničelna vektorja  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  velja  $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ . Pokažite, da sta vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  kolinearna.

2. (10 točk) Zapišite primer matrike  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  brez ničelnih vrstic in vektorja  $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ , za katera ima linearni sistem enačb  $A\vec{x} = \vec{b}$  enolično rešitev.

3. (10 točk) Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$  matrika ranga 3. Izračunajte (z utemeljitvijo):

A.  $\dim N(A)$

B.  $\dim N(A)^\perp$

4. (10 točk) Naj bo  $\vec{a} = [1 \ 1 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$  in  $\vec{b} = [1 \ 2 \ 3]^T \in \mathbb{R}^3$ . Ali je množica

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a}^T \vec{x} = \vec{x}^T \vec{b}\}$$

vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^3$ ?

5. (10 točk) Naj za matriko  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  velja  $A^2 = A$ . Določite vse možnosti za vrednost  $\det(A)$ .

6. (10 točk) Naj bo  $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linearna preslikava, podana s predpisom

$$\tau \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x + y \\ z \\ z \end{bmatrix}.$$

Zapišite matriko, ki pripada  $\tau$  v standarni bazi prostora  $\mathbb{R}^3$ .

7. (10 točk) Naj bodo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  enotski vektorji v  $\mathbb{R}^5$  in naj velja  $\vec{a} \perp \vec{b}$  in  $\vec{a} \perp \vec{c}$ . Zapišite projekcijo vektorja  $\vec{c}$  na linearno ogrinjačo vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

8. (20 točk) Naj bo  $A$   $3 \times 3$  matrika, katere rang je enak 2. Naj bosta vektorja  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$  in  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  lastna vektorja pri lastni vrednosti 1. Naj bo tudi  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  lastni vektor matrike  $A$ .

A. Določite  $N(A)$ .

B. Določite  $A^{2022}(\vec{u} + 3\vec{v} + 5\vec{w})$ .

9. (10 točk) Naj ima matrika  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  le dve različni lastni vrednosti, ki sta realni, in naj velja  $\text{rang}(A - 2I) = 1$ . Ali je matrika  $A$  diagonalizabilna?