Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

2. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA TEORETIČNI DEL

28. junij 2021

(Na teoretičnem delu je 6 nalog, ki so skupaj vredne 56 točk. Za 100% je potrebno doseči 50 točk.)

1. (8 točk) Naj bo matrika $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ dobljena iz matrike $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ z menjavo prve in pete vrstice. Če je $\det(A) = 5$, potem pokažite, da je matrika B obrnljiva.

$\det B = -\det A$ 4 točke

$\det B = -\det A = -5 \neq 0$

$\downarrow$

B je obrnljiva 4 točke

2. (8 točk) Zapišite primer matrike $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ in neničelnega vektorja $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, za katera ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ vsaj dve rešitvi.

$\rightarrow$ Ker $A\vec{x} = \vec{b}$ ima rešitev, je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}]$

$\rightarrow$ ker nima enolične rešitve, je $\operatorname{rang} A \neq 2$, torej

$\operatorname{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}] = \operatorname{rang} A = 1$

Primer:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ali pa $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

0 ali 8 točk

3. (8 točk) Naj bo Q ortogonalna matrika in A obrnljiva simetrična matrika. Pokažite, da je tudi QAQ^{T} obrnljiva simetrična matrika.

$QQ^T = Q^TQ = I$

$A = A^T$

1) obrnljivost: $\underbrace{Q}_{\text{obrnljiva}}\ \underbrace{A}_{\text{obrnljiva}}\ \underbrace{Q^T}_{\text{obrnljiva}}$ je produkt obrnljivih $\Rightarrow$ obrnljiva

4 točke

2) simetričnost: $(QAQ^T)^T = (Q^T)^T \underbrace{A^T}_{= A} Q^T = QAQ^T \Rightarrow$ je simetrična

4 točke

4. (8 točk) Ali je množica vseh 2×2 simetričnih matrik, katerih produkt lastnih vrednosti je 0, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Ne! Saj ni zaprta za seštevanje. Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l. vr. 0, 1 — prod: 0; l. vr. 0, 1 — prod: 0; l. vrednosti 1, 1 — prod = 1

0 ali 8 točk

5. (8 točk) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ linearna preslikava, ki ji v standardni bazi $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pripada matrika $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ali obstaja kakšna matrika $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katero velja $\tau(A) = -A$? če da, jo zapišite. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

ima l. vrednosti 1, 1, 3, 5

Če $A \neq 0$, je A l. vektor T pri l. vrednosti -1

Sledi, da $A = 0$ in za 0 velja $T(0) = 0$.

6. (8 točk) Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$. Izračunajte $\operatorname{rang}(A+I)$ (in utemeljite svoj izračun).

$\Delta_A(x) = x^2(x^2+2x+1) = x^2(x+1)^2$ } 2 točki

$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = -1$

$\Rightarrow \dim N(A+I) = 2$, saj je matrika simetrična

6 točk brez uporabe simetričnosti {(Au pazit, če A ni simetrična, je $\dim N(A+I) = 1$ ali 2)

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A-I) = 4-2 = 2$

7. (8 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{6\times 8}$ ranga 5?

A. AA^{T} je obrnljiva matrika.

B. A ima singularno vrednost 0.

C. A ima vseh šest vrstic neničelnih.

D. Vrstice matrike A so linearno odvisne.

E. Stolpci matrike A^{T} tvorijo bazo $\mathbb{R}^8$.

F. Stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^6$.

G. Ničelni prostor matrike A je trivialen.

H. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^6$ ima sistem $Ax = b$ natanko eno rešitev.

(Obkrožite vse pravilne odgovore. Če boste obkrožili **vse** pravilne odgovore, a nobenega napačnega, boste dobili 8 točk. Če boste obkrožili vsaj polovico pravilnih odgovorov, a nobenega napačnega, boste dobili 4 točk. V nasprotnem primeru pa 0 točk. Pri tej nalogi odgovora ni potrebno utemeljevati.)