

Digitalna vezja

UL, FRI

Vaja 3 Pretvorbe, Relacije, Quineova metoda minimizacije

Relacije med mintermi in makstermi

$$\begin{aligned}\overline{m}_i &= M_{2^n-1-i} & ; & & \overline{m}_1 &= M_6 : \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \\ m_i \vee M_{2^n-1-i} &= 1 & ; & & m_1 \vee M_6 &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \\ & & & & &= (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1) \vee x_2 \vee \overline{x_3} \\ & & & & &= (\overline{x_1} \vee x_1) \cdot (\overline{x_2} \vee x_2) \cdot (x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_2 \vee \overline{x_3} = 1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_i &= m_{2^n-1-i} & ; & & \overline{M}_6 &= m_1 : \overline{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \\ m_i \cdot M_{2^n-1-i} &= 0 & ; & & m_1 \cdot M_6 &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_1 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_2 \\ & & & & &\vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_3} = 0\end{aligned}$$

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \quad ; \quad m_0 \vee m_1 \vee \dots \vee m_{2^n-1} = 1$$

$$\big\&_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0 \quad ; \quad M_{2^n-1} \cdot M_{2^n-2} \cdot \dots \cdot M_0 = 0$$

$$\forall i \neq j : m_i \cdot m_j = 0 \quad ; \quad m_1 \cdot m_3 = (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$$

$$\forall i \neq j : M_i \vee M_j = 1 \quad ; \quad M_2 \vee M_3 = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_3} = 1$$

Pretvorba: PDNO \leftrightarrow PKNO

1. Funkcijo negiramo (izpišemo komplementarne terme).
2. Upoštevamo relaciji $\overline{m}_i = M_{2^{n-1-i}}$ in $\overline{M}_i = m_{2^{n-1-i}}$ in dobimo dualne terme.

Zgled:

a) Podano funkcijo $v^4(1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15)$ pretvori v PKNO.

1. Komplementarni mintermi (negirana funkcija): $v^4(0, 2, 5, 9, 10, 11, 13)$
2. Dualni makstermi ($\overline{M}_i = m_{2^{n-1-i}}$):

$$15 - 0, 15 - 2, 15 - 5, 15 - 9, 15 - 10, 15 - 11, 15 - 13$$

$$\text{PKNO: } \&^4(15, 13, 10, 6, 5, 4, 2)$$

b) Podano funkcijo $\&^4(12, 11, 10, 8, 7, 0)$ pretvori v PDNO.

1. Komplementarni makstermi (negirana funkcija): $\&^4(15, 14, 13, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
2. Dualni mintermi ($\overline{m}_i = M_{2^{n-1-i}}$):

$$15 - 15, 15 - 14, 15 - 13, 15 - 9, 15 - 6, 15 - 5, 15 - 4, 15 - 3, 15 - 2, 15 - 1$$

$$\text{PDNO: } v^4(0, 1, 2, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

Minimizacija

1. Sosednost: $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 = \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot (\overline{x_2} \vee x_2) = \overline{x_1} \cdot x_3$
2. Vsebovalnik: konjunktivni izraz, ki pokriva skupino enic.
3. Glavni vsebovalnik: konjunktivni izraz, ki pokriva skupino enic.
4. Potrebni glavni vsebovalnik: glavni vsebovalnik, ki pokrije enico, ki je ne more pokriti noben drug glavni vsebovalnik.
5. Minimalna oblika
 - Minimalna disjunktivna normalna oblika (**MDNO**).
 - Minimalna konjunktivna normalna oblika (**MKNO**) – funkcijo negiramo, določimo MDNO negirane funkcije, negiramo MDNO negirane funkcije in dobimo MKNO izhodiščne funkcije.
 - Minimalna normalna oblika (**MNO**) – določimo MDNO in MKNO in njuno kompleksnost (število operatorjev, število vhodov). MNO je tista, ki ima manjše število operatorjev, če je to število enako, potem je manjša tista, ki ima manj vhodov.

Tabelarična Quine-McCluskey metoda minimizacije:

1. Tabela glavnih vsebovalnikov
(iščemo sosedne člene v stolpcih z $n, n - 1, n - 2 \dots, 1$ spremenljivkami).
2. Tabela potrebnih glavnih vsebovalnikov
(določimo najmanjšo množico glavnih vsebovalnikov, ki pokrijejo vse minterme).
3. Zapis MDNO v eksplicitni obliki.

Zgled: Zapiši MDNO za funkcijo $f = \sum (0, 2, 3, 6)$

I. Tabela glavnih vsebovalnikov.

3	2	1
(0) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$		
(2) $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$		
(3) $\bar{x}_1 x_2 x_3$		
(6) $x_1 x_2 \bar{x}_3$		

3	2	1
(0) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ ✓	(0,2) $\bar{x}_1 \bar{x}_3$	-
(2) $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ ✓	(2,3) $\bar{x}_1 x_2$	
(3) $\bar{x}_1 x_2 x_3$ ✓	(2,6) $x_2 \bar{x}_3$	
(6) $x_1 x_2 \bar{x}_3$ ✓		

2. Tabela pokritij mintermov.

		m_0	m_2	m_3	m_6
	$\overline{x_1} \overline{x_3}$	√	√		
	$\overline{x_1} x_2$		√	√	
	$x_2 \overline{x_3}$		√		√

Določimo potrebne glavne vsebovalnike. Barva označuje potreben glavni vsebovalnik za pokritje mintermov v MDNO.

		m_0	m_2	m_3	m_6
√	$\overline{x_1} \overline{x_3}$	√	√		
√	$\overline{x_1} x_2$		√	√	
√	$x_2 \overline{x_3}$		√		√

3. Zapis MDNO.

$$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 \overline{x_3}$$



Naloga

A) Podana je funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = v^4 (0, 1, 4, 5, 10, 15)$. Zapišite:

1. PDNO v eksplicitni obliki
2. PKNO v skrajšani obliki (pretvorba z uporabo relacij za dualne terme)
3. PKNO v eksplicitni obliki

B) Podana je funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = v^5 (0, 4, 5, 13, 15, 21, 29, 31)$. Zapišite:

1. PDNO v eksplicitni obliki
2. MDNO z uporabo metode Quine-McCluskey
3. Preverite rešitev v Logisimu