Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Matematika: tretji izpit - računski del

6. september 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

1. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$2z + 3i(\overline{z} + 2) = (13 + 4i)(1 + i).$$

$z = x + iy \; ; \; x, y \in \mathbb{R}$

$$2(x+iy) + 3i(x - iy + 2) = (13+4i)(1+i)$$
$$2x + 2yi + 3xi + 3y + 6i = 13 + 13i + 4i - 4$$
$$(2x+3y) + (2y+3x+6)i = 9 + 17i$$

$$2x + 3y = 9 \quad / \cdot 3$$
$$2y + 3x = 11 \quad / \cdot (-2)$$
$$\left.\begin{aligned} 6x + 9y &= 27 \\ -4y - 6x &= -22 \end{aligned}\right\} +$$
$$5y = 5$$
$$y = 1$$

$$2x + 3 = 9$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

$$\boxed{z = 3 + i}$$

b) (10 točk) Poišči vse rešitve enačbe $z^3 = 8i$. Rešitve zapiši v obliki $x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$.

$a = 8i \; ; \; |a| = 8 \; , \; \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z^3 = 8i$ Rešitve: $z_k = \sqrt[3]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{3}} \; ; \; k \in \{0, 1, 2\}$

$$z_k = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}}$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{3} + i}}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{3}+i}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= 2\left(0 + i(-1)\right) = \underline{\underline{-2i}}$$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$.

a) (10 točk) Določi definicijsko območje, ničle ter pole funkcije f.

D_f: $1+x > 0$, $\underline{\underline{x > -1}}$ ničle: $x^2 = 0$, $\underline{\underline{x_{1,2} = 0}}$ poli: $\sqrt{1+x} = 0$, $\underline{\underline{x = -1}}$

b) (10 točk) Določi odvod funkcije f, njene lokalne ekstreme ter zapiši intervale naraščanja in padanja funkcije f.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1+x} - \frac{x^2 \cdot 1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{\frac{4x(1+x) - x^2}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} =$$
$$= \frac{4x + 4x^2 - x^2}{2(1+x)^{3/2}} = \frac{4x + 3x^2}{2(1+x)^{3/2}}$$

Stacionarne točke: $f'(x) = 0$

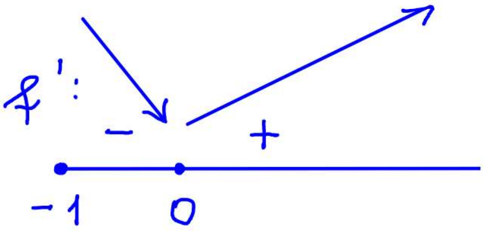
$4x + 3x^2 = 0$

$x(4+3x) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{4}{3} \notin D_f$

$\underline{\underline{T(0,0)}}$

lok. min.



f pada na $(-1, 0)$,
narašča na $(0, \infty)$

c) (5 točk) Določi enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = 0$. $T(0,0)$

V $T(0,0)$ je lokalni minimum $\Rightarrow$ tangenta je vodoravna $y = 0$.

3. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Z uporabo metode Per partes izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{\log x}{x^2}\, dx.$$

$$\int \frac{\log x}{x^2}\, dx = \int x^{-2} \log x \, dx =$$

$$u = \log x \longrightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$dv = x^{-2} dx \longrightarrow v = -x^{-1}$$

$$= -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

b) (13 točk) Izračunaj integral racionalne funkcije.

$$\int \frac{3x^2-5}{x-2}\, dx.$$

$$
\begin{array}{l}
(3x^2-5) : (x-2) = 3x + 6 \\
\underline{-3x^2 + 6x} \\
\quad 6x - 5 \\
\underline{\;-6x + 12} \\
\qquad\; 7
\end{array}
$$

$$\int \frac{3x^2-5}{x-2}\, dx = \int \left(3x + 6 + \frac{7}{x-2}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 6x + 7 \log|x-2| + C$$

4. naloga (25 točk)

Dane so točke $A(1,2,1)$, $B(1,2,3)$ in $C(-1,0,2)$ in vektor $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$.

a) (8 točk) Izračunaj ploščino ΔABC.

$$pl_{\Delta ABC} = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2} \qquad \vec{AB}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \quad \vec{AC}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

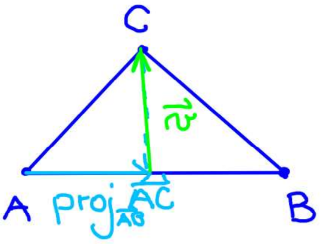
$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-4\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}0 & -2\\ 0 & -2\end{matrix}$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{4^2+(-4)^2+0^2} = \sqrt{2\cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

$$pl_{\Delta ABC} = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

b) (9 točk) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{AC}$ na vektor $\vec{AB}$ ter vektor, ki v danem trikotniku ΔABC predstavlja višino na $\vec{AB}$.



$$proj_{\vec{AB}}\vec{AC} = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}\cdot\vec{AB} = \frac{2}{4}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}}$$

$$\vec{v} = -proj_{\vec{AB}}\vec{AC} + \vec{AC} = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\end{bmatrix}}}$$

c) (8 točk) Izračunaj prostornino piramide, ki ima za osnovno ploskev ΔABC in vektor $\vec{v}$ za enega izmed robov.

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{v})| = \frac{1}{6}|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{v}| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{bmatrix}4\\-4\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot|(4\cdot 1+(-4)\cdot 0+0\cdot 2)| =$$

$$= \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$